И. Ю. П о т о ц к а я (Санкт-Петербург, СПбГУ). **Управление по «расходу» в линейных системах с возмущением.**

В работе, представленной данным докладом, продолжены начатые в [1], [2] исследования, в которых предложены алгоритмы нахождения оптимального управления механическими объектами, движение которых моделируется системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассматривается линейная задача Коши:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{U}(t) + \mathbf{M}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \tag{1}$$

при $\mathbf{x}(t) = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{x}(0) = (x_{10}, \ldots, x_{n0})$, $\mathbf{U}(t) = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbf{R}^n$, постоянной матрице A размерности $n \times n$ и периодическом возмущающем воздействии $\mathbf{M}(t) = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbf{R}^n$, компоненты которого взяты в виде $m_k = \alpha_k \sin \omega t + \beta_k \cos \omega t$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Здесь α_k, β_k — постоянные, а частота возмущения ω совпадает с собственной частотой системы (1).

Компоненты u_k управления предполагаются релейными кусочно постоянными функциями времени с конечным числом точек переключения, последняя из которых обозначается символом T, и рассматриваются в следующем представлении:

$$u_k(t) = h_k \sum_{i=1}^{2r_k} (-1)^{i+1} H(t - t_i^k) + h_k \sum_{i=1}^{2q_k} (-1)^i H(t - \widetilde{t}_i^k). \tag{2}$$

Здесь управление разбито на положительные направленные вверх ступени и ступени отрицательные, направленные вниз. Через r_k обозначено число положительных ступеней компоненты u_k управления $\mathbf{U}$, через q_k — число отрицательных ступеней той же компоненты u_k, а t_i^k и $\widetilde{t}_i^k$ — моменты времени, соответствующие переключениям этих ступеней, причем все они лежат на промежутке $[0, T]$; h_k — постоянные; $H(t)$ — функция Хевисайда единичного скачка.

При таком управлении решение задачи (1) является суммой нескольких слагаемых, отвечающих тем или иным собственным значениям λ матрицы A. Эти слагаемые будем называть *частотными компонентами решения*, отвечающими этим λ. *Допустимым* считается управление $\mathbf{U}$, которое в момент T обращает в нуль избранную частотную компоненту решения. Обозначая $\widetilde{x}(\lambda, t)$ эту компоненту, запишем данное условие $\widetilde{x}(\lambda, T) = 0$.

В качестве оптимизируемого функционала рассматривается величина

$$J = \sum_{k=1}^{n} \int_0^T |u_k(t)|\, dt, \tag{3}$$

которая называется функционалом типа «расход топлива» или просто *функционалом расхода*.

Постановка задачи следующая: при заданном числе импульсов допустимого управления найти точки переключения этого управления (включая и конечную точку T), удовлетворяющие необходимым условиям экстремума функционала расхода (3).

В монографии [1] предложены алгоритмы нахождения точек переключения управления в случае невозмущенной управляемой системы (1). В работе [2] исследуется случай нерезонансного возмущения. В данном докладе приводятся результаты, полученные для случая действия резонансного возмущающего воздействия.

Результаты решения поставленной задачи представлены в виде теоремы.

Теорема. *Пусть управляемое движение определяется задачей* (1), $\lambda_{1,2} = \pm i\mu$ *суть пара мнимых некратных собственных значений матрицы* A. *Тогда если допустимое управление вида* (2) *обращает в нуль величину* $\widetilde{x}(\lambda, T) =$

$(x(\lambda_1,T),x(\lambda_2,T))=(x(i\mu,T),x(-i\mu,T))$, *то его точки переключения* t_i^k, $\widetilde{t}_i^k$, *соответствующие необходимым условиям экстремума функционала* (3), *определяются следующими формулами*:

$$t_i^k=\widetilde{t}_i^k\pm\mu^{-1}\pi\pm2\mu^{-1}\pi l,\quad \widetilde{t}_i^k=\widetilde{t}_{i+2}^k\pm2\mu^{-1}\pi\pm2\mu^{-1}\pi l, \tag{4}$$

$$t_1^k=t_k-\Delta_k,\quad t_2^k=t_k+\Delta_k,$$

$$t_k=\mu^{-1}\mathrm{Xarctg}\frac{(\gamma'(T)c_{1,k}^*-\gamma^*(T)c_{1,k}')}{(\gamma'(T)c_{1,k}'+\gamma^*(T)c_{1,k}^*)}+\pi m_k, \tag{5}$$

$$\Delta_k=\mu^{-1}\arcsin\sqrt{1-(\gamma'(T))^2/(\Lambda^2(T)\pi_k(T))}+2\pi l,\qquad \Delta_k\in(0,\pi/2), \tag{6}$$

$$(\gamma'(T)c_{1,k}'+\gamma^*(T)c_{1,k}^*)(\cos\mu T+\beta_k/2)+(\gamma'(T)c_{1,k}^*-\gamma^*(T)c_{1,k}')(\sin\mu T+\alpha_k/2)=\mp\frac{\gamma'(T)}{\Lambda(T)}, \tag{7}$$

$$-\gamma^2(T)\mu\Lambda(T)=2\sum_{k=1}^n\sigma_k^{m_k}h_k(r_k+q_k)\sqrt{\Lambda^2(T)\pi_k(T)-(\gamma'(T))^2}. \tag{8}$$

Здесь приняты следующие обозначения: $c_{1,k}'$, $c_{1,k}^*$ — коэффициенты при вещественной и мнимой частях соответственно элемента $c_{1,k}$ матрицы C, приводящей исходную матрицу A к ее жордановой форме; $\Lambda(T)>0$ — множитель Лагранжа; $y_{1,0}'$, $y_{1,0}^*$ — коэффициенты при вещественной и мнимой частях соответственно элемента $y_{1,0}=\sum_{k=1}^n c_{1,k}x_k(0)$; $\gamma^2(T)=(\gamma'(T))^2+(\gamma^*(T))^2$,

$$\gamma'(T)=y_{1,0}'+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n(c_{1,k}'\beta_k+c_{1,k}^*\alpha_k)T,\qquad \gamma^*(T)=y_{1,0}^*+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n(c_{1,k}^*\beta_k-c_{1,k}'\alpha_k)T;$$

$$\pi_k(T)=\gamma^2(T)|c_{1,k}|^2,\quad \sigma_k^{m_k}=(-1)^{m_k}\operatorname{sign}(\gamma'(T)c_{1,k}^*-\gamma^*(T)c_{1,k}'),\quad l\in\mathbf{Z},\quad m_k=0,1,\ldots$$

З а м е ч а н и е. Величина $2\Delta_k$ — это ширина ступени управления u_k, а t_k — ее средний момент. Из совместного решения уравнений (7) и (8) можно найти T и $\Lambda(T)$ и, воспользовавшись формулами (5)–(6) при каждом k, вычислить точки переключения t_1^k, t_2^k, что дает возможность найти все остальные точки переключения управления при этом k по формулам (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабаджанянц Л. К., Потоцкая И. Ю.* Управление по критерию расхода в механических системах. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2003, 137 с.
2. *Потоцкая И. Ю.* Кусочно постоянное управление в линейных системах с периодическим возмущающим воздействием. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2006, т. 13, в. 5, с. 925–926.