

Ю. Б. Буркатовская, С. Э. Воробейчиков, Е. Е. Сергеева (Томск, ТПУ, ТГУ). **Обнаружение скачка параметров процесса ARCH(1).**

Рассматривается случайный процесс $\{x_t\}$ вида $x_t = \sigma_t \varepsilon_t$, $\sigma_t^2 = \lambda_0 + \lambda_1 x_{t-1}^2$, где $\{\varepsilon_t\}$ ($t \geq 1$) — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $\mathbf{M} \varepsilon_t = 0$, $\mathbf{M} \varepsilon_t^2 = 1$ и конечным четвертым моментом. Если $\lambda_0 > 0$, $0 < \lambda_1 < 1$, то процесс является стационарным. В момент θ вектор параметров $\Lambda = [\lambda_0, \lambda_1]$ меняет свое значение с μ_0 на μ_1 , причем $\|\mu_0 - \mu_1\|^2 > \Delta$, и значение μ_1 неизвестно. Ставится задача по наблюдениям за процессом $\{x_t\}$ обнаружить момент разладки θ .

Преобразуем уравнение, описывающее наблюдаемый процесс. Введем обозначения:

$$y_{t-1}^2 = \max\{1, x_{t-1}^2\}, \quad z_t = \frac{x_t^2}{y_{t-1}^2}, \quad a_{t-1} = \left[\frac{1}{y_{t-1}^2}, \frac{x_{t-1}^2}{y_{t-1}^2} \right].$$

Перейдем к случайному процессу $\{z_t\}$, уравнение которого имеет вид $z_t = \Lambda a_{t-1} + \Lambda a_{t-1} B \eta_t$, где $\eta_t = \varepsilon_t^2 - 1$, а $B^2 = \mathbf{M}(\varepsilon_t^2 - 1)^2$. Так как $\Lambda a_{t-1} \leq \lambda_0 + \lambda_1$, данный процесс обладает ограниченной дисперсией шумов.

Для оценивания вектора параметров Λ этого процесса предлагается использовать модифицированный метод наименьших квадратов. Оценка параметров на интервале $[t_1, t_2]$ имеет вид

$$\Lambda^*(H) = \left(\sum_{t=t_1}^{t_2} v_t a_t^T z_{t+1} \right) A^{-1}(t_1, t_2), \quad A(k) = \sum_{t=t_1}^{t_2} v_t a_t^T a_t,$$

где v_t — весовые коэффициенты специального вида. Для ограничения среднеквадратического отклонения оценок от истинного значения параметров строится последовательность случайных моментов остановки $\{\tau_i\}_{i \geq 0}$

$$\tau_i = \inf \{k \geq \tau_{i-1} + 1 : \nu_{\min}(\tau_{i-1} + 1, k) \geq H\}, \quad \tau_0 = 0,$$

где $\nu_{\min}(t_1, t_2)$ — минимальное собственное значение матрицы $A(t_1, t_2)$.

Для обнаружения момента разладки θ сначала определяется интервал наблюдений $[\tau_{i-1} + 1, \tau_i]_{i \geq 1}$, на котором вычисляется оценка Λ_i^* . Далее с этим интервалом связывается решающая статистика вида

$$J_i = \sum_{t=\tau_{i-1}+1}^{\tau_i} v_t (z_t - \mu_0 a_{t-1})^2 - \sum_{t=\tau_{i-1}+1}^{\tau_i} v_t (z_t - \Lambda_i^* a_{t-1})^2,$$

которая претерпевает скачок после момента разладки. Решение о наличии разладки принимается, если значение статистики на текущем интервале превысит некоторый порог δ . Выбор весовых коэффициентов v_t и моментов остановки τ_i гарантирует, что вероятности ложной тревоги и ложного спокойствия на каждом интервале наблюдений ограничены сверху и зависят от параметров процедуры (H, δ) .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 09-01-00172а.