В. Н. Д у м а ч е в (Воронеж, ВИ МВД России). **О векторных лагранжианах.**

Стандартным феноменологическим подходом к анализу динамической системы является построение для нее функционала действия $S = \int L\,dt$. Если представить такой функционал как подмногообразие в расслоении джетов $J^n(\pi)$: $E \to M$, определяемое уравнением $F(t, x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$, где $t \in M \subset \mathbf{R}$, $u = x_0 \in U \subset \mathbf{R}$, $x_i \in J^i(\pi) \subset \mathbf{R}^n$, $E = M \times U$, то уравнение Лагранжа–Эйлера для него

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \frac{\partial L}{\partial x_k} = 0 \tag{1}$$

будет описывать струю в $J^{2n}(\pi)$. Другой подход к получению уравнений (1) для гамильтоновых систем описан Гриффитсом [1]. Мы ищем такую 1-форму

$$\psi = L\,dt + \lambda_i \theta_i, \qquad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

которая не меняется при протягивании вдоль векторных полей $(\partial/\partial\theta_i, \partial/\partial d\theta_{n-1})$. Здесь $\theta_i = dx_i - x_{i+1}\,dt$ — распределение Картана, а λ_i — неопределенные множители Лагранжа. Ограничивая форму $\Psi = d\psi$ на поля $(\partial/\partial\theta_i, \partial/\partial d\theta_{n-1})$, получим систему

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{d\lambda_i}{dt} + \lambda_{i-1}, \qquad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad \frac{\partial L}{\partial x_n} = \lambda_{n-1},$$

эквивалентную уравнению (1).

Нашей целью является обобщение данной схемы на случай нечетных джетов.

Утверждение. *Для $L \in J^3(\pi)$ уравнение Лагранжа–Эйлера имеет вид*

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (L^i_{\dot{x}_k} - L^k_{\dot{x}_i}) = L^k_{x_i} - L^i_{x_k}. \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть 2-форма Лагранжа ψ имеет вид $\psi = L_i\,dx_i \wedge dt + \lambda_i \Theta_i$, где $\Theta = \theta \wedge \theta$. Возьмем от нее внешний дифференциал

$$\begin{aligned} d\psi = & dL^i \wedge \omega_i = (\mathrm{rot} L)^k \Theta_k \wedge dt + d\lambda_i \wedge \Theta_i + \lambda_i \wedge d\Theta_i \\ & + L^2_{\dot{x}_3}\, d\dot{x}_3 \wedge dx_2 \wedge dt + L^3_{\dot{x}_2}\, d\dot{x}_2 \wedge dx_3 \wedge dt + L^3_{\dot{x}_1}\, d\dot{x}_1 \wedge dx_3 \wedge dt \\ & + L^1_{\dot{x}_3}\, d\dot{x}_3 \wedge dx_1 \wedge dt + L^1_{\dot{x}_2}\, d\dot{x}_2 \wedge dx_1 \wedge dt + L^2_{\dot{x}_1}\, d\dot{x}_1 \wedge dx_2 \wedge dt \\ & + L^1_{\dot{x}_1}\, d\dot{x}_1 \wedge dx_1 \wedge dt + L^2_{\dot{x}_2}\, d\dot{x}_2 \wedge dx_2 \wedge dt + L^3_{\dot{x}_3}\, d\dot{x}_3 \wedge dx_3 \wedge dt \end{aligned}$$

и, ограничивая его на векторные поля $v = (\partial_{\Theta_k}, \partial_{d\Theta_k})$

$$(\mathrm{rot} L)^k = \dot{\lambda}_k, \quad L^3_{\dot{x}_2} - L^2_{\dot{x}_3} = 2\lambda_1, \quad L^1_{\dot{x}_3} - L^3_{\dot{x}_1} = 2\lambda_2, \quad L^2_{\dot{x}_1} - L^1_{\dot{x}_2} = 2\lambda_3,$$

получим уравнения Лагранжа–Эйлера (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bryant R. L.*, *Chern S. S.*, *Gardner R. B.*, *Goldschmidt H. L.*, *Griffiths P. A.* Exterior Differential Systems. N. Y.: Springer–Verlag, 1991, 476 p.