А. В. Маркин (Москва, МГУ). **Состоятельность оценки риска при пороговой обработке вейвлет-коэффициентов.**

Пусть имеются наблюдения X, состоящие из полезного сигнала f и аддитивного гауссовского шума ε с дисперсией σ^2: $X = f + \varepsilon$. Размер сигнала равен N. Необходимо оценить f по X. Параметр σ практически всегда неизвестен, для него существует лишь некоторый разумный диапазон.

После применения вейвлет-преобразования имеем: $X_W = f_W + \varepsilon_W$, где ε_W также будет гауссовским шумом с дисперсией σ^2. Рассмотрим мягкую и жесткую пороговую обработку:

$$\rho_S(x,T) = (x-T)\mathbf{1}_{x>T} + (x+T)\mathbf{1}_{-x>T}, \quad \rho_H(x,T) = x\mathbf{1}_{|x|>T}.$$

Определим риск пороговой обработки: $r(f,T) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}\{f_W[i] - \rho(X_W[i])\}^2$. Однако вычислить явно $r(f,T)$ нельзя, т. к. в выражении присутствуют неизвестные величины $f_W[i]$. Поэтому для теоретического риска используют его оценку. Например, можно использовать такую оценку:

$$\widetilde{r}(f,T) = \sum_{i=1}^{N} \Phi((X_W[i])^2). \tag{1}$$

Для мягкого порога $\Phi(x) = \Phi_S(x) = (x-\sigma^2)\mathbf{1}_{x\leqslant T^2} + (\sigma^2 + T^2)\mathbf{1}_{x>T^2}$, для жесткого $\Phi(x) = \Phi_H(x) = (x-\sigma^2)\mathbf{1}_{x\leqslant T^2} + \sigma^2\mathbf{1}_{x>T^2}$.

Теорема 1. *Для любого $\delta > 0$ и любого $\alpha > 0$ справедливо*

$$\mathbf{P}\left\{\frac{|\widetilde{r}(f,T) - r_S(f,T)|}{N^{\alpha+1/2}} > \delta\right\} \to 0.$$

При мягкой пороговой обработке порог T — произвольный, при жесткой — нет, в силу смещенности оценки риска [1]. В теореме 1 предполагается, что дисперсия шума известна. Однако на практике она оценивается, причем по самой выборке.

Теорема 2. *Пусть $\widehat{\sigma}^2$ — оценка дисперсии, $\mathbf{E}\,\widehat{\sigma}^2 = \sigma^2 + \nu_N$ и $\mathbf{D}\,\widehat{\sigma}^2 = O(N^{-\beta})$, $\nu_N = o(1)$, $\beta > 0$. Пусть выбран порог $\widehat{T} = \widehat{\sigma}\sqrt{2\ln N}$. Тогда для любого $\delta > 0$ выполнено*

$$\mathbf{P}\left\{\frac{|\widehat{r}(f,\widehat{T}) - r(f,T)|}{N} > \delta\right\} \to 0.$$

При этом $\widehat{r}(f,\widehat{T})$ определяется аналогично (1), только вместо σ и T используются, соответственно, $\widehat{\sigma}$ и $\widehat{T}$.

В качестве оценок можно использовать, например, классическую оценку S^2 (оценка σ^2) и нормированный интерквартильный размах (робастная оценка σ). Ограничения на оценку из теоремы 2 для них выполнены [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mallat S.* A Wavelet tour of signal processing. Academic Press, 1999.
2. *Bickel P.* Some contributions to the theory of order statistics. — In: Proceedings of the Fifth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob., 1967, v. 1, p. 575–591.