В. А. Копытцев, В. Г. Михайлов (Москва, ТВП, МИАН). **Некоторые следствия из теорем пуассоновского типа для числа решений случайного линейного включения.**

В [3] нами была рассмотрена следующая задача. При заданных множествах D и B векторов линейных пространств V^n и V^T над конечным полем (обозначим его K) размерности n и T соответственно и случайной матрице A размера $T \times n$ над полем K рассматривалось распределение числа векторов, удовлетворяющих системе соотношений $x \in D$, $Ax \in B$ (числа решений случайного линейного включения $Ax \in B$, принадлежащих множеству D). Были найдены условия, обеспечивающие (когда поле K неизменно, а $T, n \to \infty$) сходимость этого распределения в одном случае к многомерному, а в другом случае к сложному распределению Пуассона. В них предполагается, что матрица $A = \|a_{i,j}\|$ состоит из независимых случайных величин и $T\Delta \to 0$, где Δ определяется формулами ($|K|$ обозначает число элементов в K):

$$\Delta = \max_{i,j,k} |\Delta_{i,j}(k)|, \quad \mathbf{P}\{a_{i,j} = k\} = \frac{1 + \Delta_{i,j}(k)}{|K|}, \qquad k \in K.$$

На множества D и B в [3] наложено следующее условие. Обозначим $N(a_1, a_2, a_3, d, B)$ число решений уравнения $a_1 u^1 \oplus a_2 u^2 \oplus a_3 u^3 = d$ относительно тройки $(u^1, u^2, u^3) \in B^3$, где $a_1, a_2, a_3 \in K \backslash \{0\}$, $d \in V^T$. Пусть $N(B) = \max_{a_1, a_2, a_3, d} N(a_1, a_2, a_3, d, B)$ и $\rho(B) = N(B)|N|^{-2}$. Функция $\rho(D)$ определяется аналогично. В [3] предполагается, что $\rho(D)\rho(B) \to 0$.

Условие $\rho(B) \to 0$ можно трактовать как асимптотическую нелинейность множества $B = B(T)$ при $T \to \infty$. То же самое можно сказать об условии $\rho(D) \to 0$ при $n \to \infty$.

Приведем следствия из упомянутых результатов, относящиеся непосредственно к системам случайных линейных уравнений над конечным полем.

Рассмотрим совместное распределение чисел решений, принадлежащих множеству D, у случайных систем $Ax = b^1, \ldots, Ax = b^s$ с одинаковой левой и разными правыми частями. Из теоремы 2 работы [3] вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $0 \notin D$, $b^1, \ldots, b^s \in V^T \backslash \{0^T\}$ и среди них нет попарно коллинеарных векторов. Если $T, n \to \infty$ и при переходе к пределу $T\Delta \to 0$, $|D| \to \infty$, $\rho(D) \to 0$, $|K|^{-T}|D| \to \lambda$, $0 < \lambda < \infty$, то числа тех решений систем $Ax = b^1, \ldots, Ax = b^s$, которые принадлежат множеству D, асимптотически независимы, а распределение каждого из них сходится к распределению Пуассона с параметром λ.*

Эта теорема существенно дополняет результаты работ [1] и [2], распространяя некоторые из них на случай множеств общего вида.

Для числа «приближенных» решений заведомо совместной системы линейных уравнений $Ax = Ax^0$ из теоремы 3 работы [3] вытекают следующие ниже утверждения. Пусть $\xi_{r_1, r_2}(x^0)$ — число тех $x \in V^n$, для которых $1 \leqslant \|x - x^0\| \leqslant r_1$ и $\|Ax - Ax^0\| \leqslant r_2$.

Теорема 2. *Пусть $T, n \to \infty$, $T\Delta \to 0$, параметры $r_1, r_2 \geqslant 1$ меняются так, что $\mathbf{E}\,\xi_{r_1, r_2}(x^0) \to \lambda$, $0 < \lambda < \infty$, и при некотором числе ρ, $0 < \rho < (|K| - 1)|K|^{-1}$, выполнено хотя бы одно из условий $r_1 \leqslant \rho$, $r_2 \leqslant \rho$. Тогда при любом изменении x^0 распределение случайной величины $\xi_{r_1, r_2}(x^0)/(|K| - 1)$ сходится к распределению Пуассона с параметром $\lambda/(|K| - 1)$.*

Пусть $\xi_r(x^0)$ — число тех решений системы уравнений $Ax = Ax^0$, для которых $1 \leqslant \|x - x^0\| \leqslant r$.

Теорема 3. *Пусть $T, n \to \infty$, $T\Delta \to 0$, параметр $r \geqslant 1$ меняется так, что $r \leqslant \rho < (|K| - 1)|K|^{-1}$, и $\mathbf{E}\,\xi_r(x^0) \to \lambda$, $0 < \lambda < \infty$. Тогда при любом изменении вектора x^0 распределение случайной величины $\xi_r(x^0)/(|K| - 1)$ сходится к распределению Пуассона с параметром $\lambda/(|K| - 1)$.*

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект № 08–01–00078a.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Копытцев В. А.* О числе решений систем линейных булевых уравнений в множестве векторов, обладающих заданным числом единиц. — Дискретн. матем., 2002, т. 14, в. 4. с. 87–109.
2. *Копытцев В. А.* О числе решений системы случайных линейных уравнений. — Дискретн. матем., 2006, т. 18, в. 1, с. 40–62.
3. *Копытцев В. А.*, *Михайлов В. Г.* Теоремы пуассоновского типа для числа специальных решений случайного линейного включения, 2009.