В. И. Ряжских, **М. И. Слюсарев**, **А. А. Богер**, **М. В. Поздняков** (Воронеж, ВГТА)**. Об одном точном решении задачи свободной конвекции в прямоугольной области.**

Стационарная задача кондуктивно-ламинарного режима свободной конвекции для прямоугольной области в переменных Гельмгольца сформулирована в следующем виде:

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial X^2}+\xi^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial Y^2}+\mathrm{Gr}\frac{\partial T}{\partial X}=0,\quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2}+\xi^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial Y^2}=-\Omega,\quad \frac{\partial^2 T}{\partial X^2}+\xi^2\frac{\partial^2 T}{\partial Y^2}=0,\qquad (1)$$

$$\begin{gathered}\Psi(0,Y)=\Psi(1,Y)=\Psi(X,0)=\Psi(X,1)=0,\\ \frac{\partial\Psi(0,Y)}{\partial X}=\frac{\partial\Psi(1,Y)}{\partial X}=\frac{\partial\Psi(X,0)}{\partial Y}=\frac{\partial\Psi(X,1)}{\partial Y}=0,\end{gathered}\qquad (2)$$

$$T(0,Y)=1,\quad T(1,Y)=0,\quad \frac{\partial T(X,0)}{\partial Y}=\frac{\partial T(X,1)}{\partial Y}=0,\qquad (3)$$

где Ω, Ψ, T — безразмерный вихрь, функция тока и температура; X, Y — относительные декартовые координаты, ξ — геометрический параметр, равный отношению ширины области к ее высоте; Gr — число Грасгофа, определяемое по ширине области.

Так как температурное поле описывается выражением $T(X,Y)=1-X$, то вместо (1) записана система

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial X^2}+\xi^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial Y^2}=\mathrm{Gr},\quad \frac{\partial^2\Omega}{\partial X^2}+\xi^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial Y^2}=-\Omega,\qquad (4)$$

с условием (2). Из (4) следует уравнение

$$\frac{\partial^4\Psi}{\partial X^4}+2\xi^2\frac{\partial^4\Psi}{\partial X^2\partial Y^2}+\xi^4\frac{\partial^4\Psi}{\partial Y^4}=-\mathrm{Gr},$$

которое решено методом совместного применения конечного интегрального синус-преобразования по переменным X и Y соответственно. В результате получено

$$\Psi(X,Y)=-\frac{4}{\pi^6}\mathrm{Gr}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m-1}{m}\sin(\pi mY)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^4+\xi^2m^4}\sin(\pi nX).\qquad (5)$$

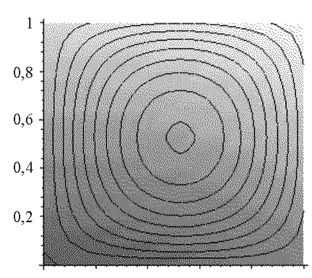

Рис. Функция тока при $\mathrm{Gr}=\xi=1$

Выражение для Ω получено из (4) подстановкой в него соотношения (5). Результаты вычислительного эксперимента (см. рис.) свидетельствуют о качественной и количественной адекватности полученного решения и о возможности идентификации верхней границы по числу Gr кондуктивно-ламинарного режима свободной конвекции, а также тестировании на точность предлагаемых численных методов интегрирования уравнений Обербека–Буссинеска.