Н. О. С е д о в а (Ульяновск, УлГУ). **Топологическая динамика неавтономного функционально-дифференциального уравнения с конечным запаздыванием.**

Пусть $\mathbf{R}^+ = [0, +\infty)$, $\mathbf{R}^n$ —- действительное линейное пространство n-векторов с нормой $|\cdot|$, $C(X,Y)$ — пространство непрерывных отображений $X \to Y$, $r > 0$ — фиксированная постоянная. Определим пространство $C := C([-r,0], \mathbf{R}^n)$ функций φ с нормой $\|\varphi\| = \max\{|\varphi(s)|\colon\ -r \leqslant s \leqslant 0\}$ и множества $C_a = \{\varphi \in C\colon\ \|\varphi\| < a\}$, $\overline{C}_a = \{\varphi \in C\colon\ \|\varphi\| \leqslant a\}$ для произвольного числа $a > 0$.

Если $x(t) \in C([\alpha - r, \alpha + \beta), \mathbf{R}^n)$ ($\alpha \in \mathbf{R}^+$, $\beta > 0$), то элемент $x_t \in C$ для каждого $t \in [\alpha, \alpha + \beta)$ определяется равенством $x_t(s) = x(t+s)$, $-r \leqslant s \leqslant 0$.

В введенных обозначениях неавтономное функционально-дифференциальное уравнение (ФДУ) запаздывающего типа имеет вид

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \tag{1}$$

где $\dot{x}(t)$ — правосторонняя производная функции x в точке t, функционал $f\colon\ \mathbf{R}^+ \times C_H \to \mathbf{R}^n$.

ФДУ запаздывающего типа широко используются в современном математическом моделировании при описании процессов различной природы. Многие результаты об асимптотическом поведении решений таких уравнений основаны на предположении, что отображение $\pi(t, \varphi, f) = (x_t(\varphi), f^t)$ является полудинамической системой (здесь $x_t(\varphi)$ — решение уравнения (1) с начальной точкой $(0, \varphi)$, f^t — сдвиг функционала f, определяемый равенством $f^t(s, \varphi) = f(s + t, \varphi)$). Для определения отображения π необходимо определить функциональное пространство, содержащее правую часть уравнения вместе со своими сдвигами, так, чтобы π обладало свойствами полудинамической системы. В представленной работе обосновано, что допустимо более общее определение этого пространства по сравнению с используемым ранее. Соответствующие предположения и построения аналогичны предложенным в [4] для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Предполагается, что правая часть уравнения (1) удовлетворяет следующим условиям типа Каратеодори: функционал $f(t, \varphi)$ в области $\mathbf{R}^+ \times C_H$ является непрерывным по φ при каждом фиксированном t, измеримым по t при фиксированном φ, и для каждого $q \in (0, H)$ существует такая локально интегрируемая по Лебегу функция $M_q(t)$, что для всех $\varphi \in \overline{C}_q$ и $t \in \mathbf{R}^+$ справедлива оценка

$$|f(t, \varphi)| \leqslant M_q(t). \tag{2}$$

Кроме того, считается выполненным следующее предположение.

Предположениею. *Для каждого компакта $K \subset C_H$ существует такая локально интегрируемая по Лебегу функция $L_K(t)$, что для всех $\varphi, \psi \in K$ и $t \in \mathbf{R}^+$ справедлива оценка*

$$|f(t, \varphi) - f(t, \psi)| \leqslant L_K(t)\|\varphi - \psi\|, \tag{3}$$

при этом функции $M_q(t)$ и $L_K(t)$ удовлетворяют условиям: существует $N(K) > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(q, \varepsilon) > 0$, что если $t \in \mathbf{R}^+$ и E — измеримое подмножество интервала $[t, t+1]$, мера которого не больше δ, то

$$\int_E M_q(\tau)\, d\tau \leqslant \varepsilon, \quad \int_t^{t+1} L_K(\tau)\, d\tau \leqslant N(K). \tag{4}$$

Заметим, что из предположения следует, что для каждого числа $q \in (0, H)$ существует такая неубывающая функция $\mu_q \in C(\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^+)$, $\mu_q(0) = 0$, что для любой функции $u \in C([a,b],\overline{C}_q)$ и любых $t_1, t_2 \in [a,b]$ выполняется неравенство

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} f(\tau, u(\tau))\, d\tau \right| \leqslant \mu_q(|t_2 - t_1|). \tag{5}$$

Пусть $\{q_n\}$ — такая последовательность чисел, что $q_1 < q_2 < \cdots < q_n \to H$ при $n \to \infty$. Для каждого q_i определим множество $K_i \subset C$ всех таких функций $\varphi \in C$, что для $s, s_1, s_2 \in [-r, 0]$ выполняются неравенства $|\varphi(s)| \leqslant q_i$, $|\varphi(s_2) - \varphi(s_1)| \leqslant \mu_{q_i}(|s_2 - s_1|)$ (здесь μ — функция из (5)).

Очевидно, что множество K_i является компактным. Положим $\Gamma = \cup_{i=1}^{\infty} K_i$.

Пусть $\mathcal{F}_f$ есть семейство функционалов $g(t,\varphi)$: $\mathbf{R}^+ \times \Gamma \to \mathbf{R}^n$, удовлетворяющих на каждом множестве $\mathbf{R}^+ \times K_i$ оценкам вида (2), (3) с некоторыми функциями $M_{q_i,g}(t)$ и $L_{K_i,g}(t)$, для которых выполняются условия (4) с фиксированными числами $N(K_i)$ и $\delta(q_i, \varepsilon)$.

Сходимость в пространстве $\mathcal{F}_f$ определим следующим образом.

О п р е д е л е н и е. Последовательность g_k сходится к g в пространстве $\mathcal{F}_f$, если для любых $\varphi \in \Gamma$, $t \in \mathbf{R}^+$ последовательность $\int_0^t g_k(\tau,\varphi)\, d\tau$ сходится к $\int_0^t g(\tau,\varphi)\, d\tau$ в пространстве $\mathbf{R}^n$.

Можно показать, что введенная сходимость является метризуемой и справедливо следующее утверждение, доказательство которого можно провести по схеме, предложенной в [4].

Теорема. *Пространство $\mathcal{F}_f$ компактно.*

Рассмотрим теперь уравнение (1), правая часть которого удовлетворяет сделанному ранее предположению. Функция $x(t; \alpha_0, \varphi)$ называется *решением уравнения* (1), если $x_{\alpha_0} = \varphi$ для некоторого $A > 0$, $x \in C([\alpha_0 - r, \alpha_0 + A], \mathbf{R}^n)$ и $x(t)$ — абсолютно непрерывная функция на $[\alpha_0, \alpha_0 + A]$, удовлетворяющая почти всюду на $[\alpha_0, \alpha_0 + A]$ уравнению (1).

Заметим, что справедливость оценки (5) для функционала f позволяет в последующих построениях и утверждениях, не ограничивая общности, рассматривать сужение правой части уравнения (1) на множество $\mathbf{R}^+ \times \Gamma$, поскольку в этом случае для любого решения множество $\{x_t\colon t \in [\alpha_0 + r, \beta)\}$ содержится в множестве Γ.

На основе идей из [3] для уравнения (1), правая часть которого принадлежит пространству $\mathcal{F}_f$, доказываются результаты о существовании, единственности и продолжимости, а также о непрерывной зависимости решений (1) от начальной точки и правой части уравнения (последняя подразумевает топологию пространства $\mathcal{F}_f$).

Используя эти результаты, нетрудно убедиться, что отображение π: $\mathbf{R}^+ \times \Gamma \times \mathcal{F} \to \Gamma \times \mathcal{F}$ является полудинамической системой.

Очевидно, для $f \in \mathcal{F}_f$ семейство сдвигов $\mathcal{F}_f^0 = \{f^\tau\colon \tau \in \mathbf{R}^+\} \subset \mathcal{F}_f$. В силу компактности этого пространства имеет место следующий результат.

Лемма. *Для функционала $f \in \mathcal{F}_f$ и произвольной последовательности $t_k \to +\infty$ существуют такие подпоследовательность $t_{k_j} \to +\infty$ и функционал $f^*(t,\varphi) \in \mathcal{F}_f$, что последовательность $f^{t_{k_j}}(t,\varphi)$ сходится к $f^*(t,\varphi)$ в пространстве $\mathcal{F}_f$. При этом функционал $f^*(t,\varphi)$ для каждого фиксированного $\varphi \in \Gamma$ и почти всех $t \in \mathbf{R}^+$ определяется равенством*

$$f^*(t,\varphi) = \frac{d}{dt} \lim_{j \to \infty} \int_0^t f^{t_{k_j}}(\tau,\varphi)\, d\tau.$$

Функционал $f^*(t,\varphi)$, определяемый леммой, является предельным к функционалу f в пространстве $\mathcal{F}_f$, и уравнению (1) можно сопоставить семейство так называемых *предельных уравнений* вида $\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)$. Используя взаимосвязь решений исходного и предельных уравнений, можно получить результаты, позволяющие делать выводы об асимптотическом поведении решений уравнения (1) на основе информации о предельных уравнениях и наоборот; метод предельных уравнений в сочетании с прямым методом Ляпунова позволяет получить более общие достаточные условия различных видов устойчивости и неустойчивости (см., например, [1], [2]). В известных результатах для ФДУ, использующих метод предельных уравнений, предполагается, что семейство сдвигов правой части уравнения (1) предкомпактно в компактно-открытой топологии. Такой тип сходимости обуславливает необходимость довольно ограничительных предположений на правую часть уравнения, а именно, требуется ее равномерная непрерывность и ограниченность на каждом множестве вида $\mathbf{R}^+ \times K$, где $K \subset C_H$ — компакт. Включение семейства сдвигов правой части уравнения (1) в иное функциональное пространство, рассмотренное в данном докладе, позволяет существенно расширить класс задач, которые можно исследовать с использованием метода предельных уравнений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 08–01–97010–р–поволжье–а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андреев А. С.* Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений. Ульяновск: УлГУ, 2005.
2. *Мартынюк А. А.*, *Като Д.*, *Шестаков А. А.* Устойчивость движения: метод предельных уравнений. Киев: Наукова думка, 1990.
3. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
4. *Artstein Z.* Topological dynamics of ordinary differential equations. — J. Differ. Equations, 1977, v. 23, p. 216–223.