Н. В. Семенчук (Гродно, ГрГУ). **О построении оптимальных оценок спектральных плотностей посредством вейвлетов.**

Пусть $X(0), \dots, X(T-1)$ — T последовательных наблюдений за процессом $X(t)$, $t \in \mathbf{Z}$. В качестве оценки спектральной плотности $f(\lambda)$ рассмотрим статистику $\widehat{f}(\lambda) = \sum_{k=1}^{2^J} \widehat{\alpha}_{J,k} \widetilde{\varphi}_{J,k}(\lambda)$, $\widehat{\alpha}_{J,k}$ — оценки вейвлет-коэффициентов, построенные с помощью периодограммы с единичным окном просмотра данных, $\widetilde{\varphi}_{J,k}(\lambda)$ — 2π-периодические масштабирующие функции.

Пусть $X(t) \in \chi(\lambda, f, \alpha, L, C_2)$, если при заданных $\lambda \in \Pi$: $f(\lambda) > 0$, $L > 0$, $C_2 > 0$, спектральная плотность $f(\lambda) \in \mathrm{Lip}_\alpha(L)$, $\alpha \in (0,1]$, и $|f_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)| \leqslant C_2$, $\lambda_j \in \Pi$, $j = 1, 2, 3$.

Пусть $\varphi(x)$ — масштабирующая функция с компактным носителем, содержащимся в $[-H, H]$, $0 < H < \infty$. Пусть $\varphi(x) \in \mathrm{Lip}_\mu(L_1)$, $L_1 > 0$, $\mu \in (0,1]$.

Для смещения и дисперсии указанной оценки получены следующие результаты:

$$\sup_{X(t) \in \chi(\lambda, f, \alpha, L, C_2)} |M\widehat{f}(\lambda) - f(\lambda)| = \frac{(2\pi)^\alpha (2H+1)}{2^{I\alpha}} \Bigg[\int_{\mathbf{R}} |z|^\alpha |\varphi(z)| \, dz + (2H+1) \int_{\mathbf{R}} |z||\varphi(z)| \, dz \Bigg] + R_T,$$

где

$$R_T = \begin{cases} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{T^\nu}\right), & \text{если } 0 < \nu < 1, \\ O\left(\dfrac{\ln(\pi T)}{T}\right), & \text{если } \nu = 1 \end{cases}$$

для любых $\lambda \in \Pi$,

$$\sup_{X(t) \in \chi(\lambda, f, \alpha, L, C_2)} D(\widehat{f}(\lambda) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k_1=1}^{2^J} \sum_{k_2=1}^{2^J} \widetilde{\varphi}_{J,k_1}(\lambda) \widetilde{\varphi}_{J,k_2}(\lambda) \times \int_\Pi \widetilde{\varphi}_{J,k_1}(\alpha) (\widetilde{\varphi}_{J,k_2}(-\alpha) + \widetilde{\varphi}_{J,k_2}(\alpha)) f^2(\alpha) \, d\alpha + O\left(\frac{1}{T}\right) + O\left(\frac{2^J \ln^5(\pi T)}{T^{1+\nu}}\right) + O\left(\frac{2^{J(\mu+1)} \ln^5(\pi T)}{T^{1+\mu}}\right) + O\left(\frac{2^{2J} \ln^3(\pi T)}{T^2}\right),$$

для любых $\lambda \in \Pi$.

Далее строятся оптимальные оценки спектральных плотностей, исходя из решения следующей задачи:

$$\nabla \widehat{f}_T(\lambda) = M(\widehat{f}_T(\lambda) - f(\lambda))^2 = (M\widehat{f}_T(\lambda) - f(\lambda))^2 + D\widehat{f}_T(\lambda) \to \min_{\varphi, J}.$$

В результате находятся оптимальный уровень разложения и оптимальная масштабирующая функция в зависимости от длины реализации T и характера гладкости спектральной плотности. Данная задача решена с использованием стандартных средств системы компьютерной алгебры Mathematica. Теоретические результаты также аппробированы на ряде модельных примеров.