Н. П. С о л о в ь е в а (Челябинск, ЮУрГУ). **Начально-конечная задача для линейного уравнения Хоффа на графе.**

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства; операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $M \in \mathrm{Cl}\,(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, причем оператор M (L,p)-ограничен [1]. Рассмотрим линейное неоднородное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f, \quad \ker L \neq \{0\}. \tag{1}$$

Пусть относительный спектр $\sigma^L(M) = \sigma^L_{in}(M) \cup \sigma^L_{ex}(M)$, причем $\sigma^L_{in}(M)$ содержится в ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{C}$ с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$ и $\partial\Omega \cap \sigma^L(M) = \varnothing$. Тогда существуют проекторы

$$P_{in} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R^L_\mu(M)\,d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}), \quad O_{in} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R^L_\mu(M)\,d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}),$$

где контур $\gamma = \partial\Omega$ такой, что операторы $L \in \mathcal{L}(\ker P_{in}; \ker Q_{in}) \cap \mathcal{L}(\operatorname{im} P_{in}; \operatorname{im} Q_{in})$, $M \in \mathrm{Cl}(\ker P_{in}; \ker Q_{in}) \cap \mathrm{Cl}(\operatorname{im} P_{in}; \operatorname{im} Q_{in})$.

Рассмотрим проектор $P_{ex} = P - P_{in} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, возьмем $T \in \mathbf{R}_+$, $u_0, u_T \in \mathfrak{U}$ и поставим начально-конечную задачу [2]

$$P_{ex}(u(0) - u_0) = 0, \quad P_{in}(u(T) - u_T) = 0. \tag{2}$$

Пусть теперь $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}, \mathfrak{E})$, где $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ — множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_i\}$ — множество ребер, есть конечный связный ориентированный граф, причем каждое его ребро E_i имеет длину $l_i \in \mathbf{R}_+$ и площадь поперечного сечения $d_j \in \mathbf{R}_+$. На графе $\mathbf{G}$ рассмотрим линейное уравнение Хоффа

$$\lambda u_{jt} + u_{jtxx} = \alpha u_j + f_j, \tag{3}$$

которое моделирует динамику выпучивания конструкции из двутавровых балок. Нас интересуют решения уравнения (3), удовлетворяющие следующим условиям:

$$u_j(0,t) = u_k(0,t) = u_m(l_m,t) = u_n(l_n,t), \tag{4}$$

где $E_j, E_k \in E^\alpha(V_i)$, $E_m, E_n \in E^w(V_i)$ $(E^{\alpha\,(w)}(V_i)$ — множество ребер с началом (концом) в вершине $V_i)$, а также

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j u_{jx}(0,t) - \sum_{E_k \in E^w(V_i)} d_k u_{kx}(l_k,t) = 0. \tag{5}$$

Чтобы редуцировать задачу (3)–(5) к задаче (1)–(2), введем в рассмотрение банаховы пространства $\mathfrak{F} = \{g = (g_1, g_2, \ldots, v_j, \ldots) : g_j \in L_2(0,l_j),\ v_j \in W^1_2(0,l_j)$ и выполнено (4)$\}$, $\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, \ldots, u_j, \ldots)\colon u_j \in W^2_2(0,l_j)$ и выполняются (4), (5)$\}$. Формулой A: $u \to (u_{1xx}, u_{2xx}, \ldots, u_{jxx}, \ldots)$ зададим оператор $A \in L(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Выберем $\lambda \in \mathbf{R}$ и построим оператор $L = \lambda + A$. По построению оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, а его спектр $\sigma(L) = \{\lambda + \lambda_k\}$, где $\{\lambda_k\}$ — собственные значения оператора A по неубыванию с учетом кратности. Оператор M зададим формулой $M = \alpha\mathbf{I}$.

Теорема. *При любых $\lambda \in \mathbf{R}_+$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $u_0, u_T \in \mathfrak{U}$, $f \in \mathfrak{F}$ существует единственное решение $u \in C([0,T];\mathfrak{U}) \cap C^1((0,T);\mathfrak{U})$ задачи (4)–(5) для уравнения (3) вида*

$$u(t) = \sum_{\mu_k \in \sigma^L_{ex}} \left[\exp\left\{\frac{t\alpha}{\lambda + \lambda_k}\right\}\langle u_0 + \alpha^{-1} f^{ex}, \varphi_k\rangle\varphi_k - \alpha^{-1}\langle f^{ex}, \varphi_k\rangle\varphi_k\right]$$
$$+ \sum_{\mu_k \in \sigma^L_{ex}} \left[\exp\left\{\frac{(T-t)\alpha}{\lambda + \lambda_k}\right\}\langle u_T - \alpha^{-1} f^{in}, \varphi_k\rangle\varphi_k + \alpha^{-1}\langle f^{in}, \varphi_k\rangle\varphi_k\right] - \alpha^{-1} f^0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sviridyuk G. A.*, *Fedotov V. E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operations Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.
2. *Загребина С. А.* О задаче Шоуолтера–Сидорова. — Изв. ВУЗов. Математика, 2007, № 3, с. 22–28.