

Д. В. У ч а й к и н (Ульяновск, УлГУ). **Дробная производная в задаче о поглощении звука в биологических тканях.**

Стандартная форма дисперсионного соотношения в случае распространения звука в среде имеет вид $k = \omega/c_0 + i\gamma(\omega)$. В книге [1] рассмотрены случаи $\gamma(\omega) = a_2\omega^2$ и $\gamma(\omega) = a_0$. В работе [2] отмечено, что для большинства биологических тканей зависимость $\gamma(\omega)$ можно представить в степенном виде $\gamma(\omega) = a_\nu\omega^\nu$, $\nu \in [0, 2]$. В работе, представленной данным сообщением, выведено соответствующее этому случаю дробно-дифференциальное уравнение в частных производных $D_x^\nu p_\nu(x, \tau) = -a_\nu(-\Delta_\tau)^{\nu/2} p_\nu(x, \tau)$, где $\tau = t - x/c_0$, и показано, что в случае импульсного источника, или на большом расстоянии от источника ограниченной длительности решение выражается формулой

$$p_\nu(x, \tau) = (ax)^{-1/\nu} g_1(\tau(ax)^{-1/\nu}; \nu) Q_0, \quad Q_0 = \int_{-\infty}^{\infty} p_\nu(0, \tau) d\tau. \quad (1)$$

При $\nu = 2$ решение (1) имеет вид классической гауссовой кривой, при $\nu = 1$ — распределения Коши, в других случаях $g_1(\tau; \nu)$ не выражается в элементарных функциях. Используя метод Монте-Карло, как описано в книге [4], мы получили следующее выражение для $g_1(\tau_i; \nu)$:

$$g_1(\tau_i; \nu) \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{-z_0(\Phi_j, \tau_i)} \frac{\nu}{|\nu - 1|} \left(\frac{|V(\Phi_j)|^\nu}{\tau_i} \right)^{1/(\nu-1)}, \quad (2)$$

где $z_0(\varphi, \tau) = (\tau/V(\varphi))^{\nu/(\nu-1)}$, $V(\varphi) = \sin(\nu\varphi) \cos(\varphi)^{-1/\nu} [\cos((1-\nu)\varphi)]^{(1-\nu)/\nu}$, Φ — равномерно распределенная на $(-\pi/2, \pi/2)$ случайная величина.

На рис. 1 для различных значений ν и момента времени $t = 1$ изображен профиль волны, имеющий в начальный момент времени форму дельта-импульса. В случае $\nu = 2$ профиль имеет форму гауссовой кривой, а при $\nu = 1$ — распределения Коши. На рис. 2 в полулогарифмическом масштабе представлены решения (1) для $\nu = 2$ (вода) и $\nu = 1,5$ (мышечная ткань) [2], соответствующие трем последовательным моментам времени $\tau = 1, 2, 3$.

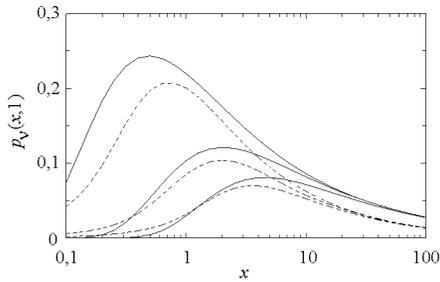


Рис. 1. Функция $p_\nu(x, 1)$, $\nu = 0,4, 0,6, \dots, 2,0$ (снизу вверх)

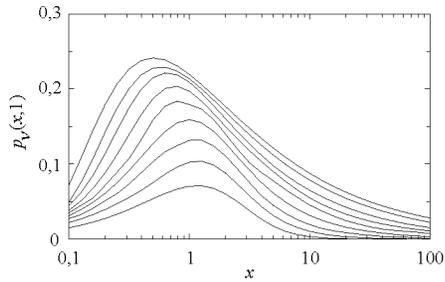


Рис. 2. Распространение дельта-импульса. Функция $p_\nu(x, \tau)$, $\nu = 2$ (сплошная) и $\nu = 1,5$ (пунктир), $\tau = 1, 2, 3$ (сверху вниз)

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 07-01-00517.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. М.: Физматлит, 2001, т. VI, 736 с.
2. Chen W. Levy stable distributions and [0,2] power law dependence of acoustic absorption on frequency. — Chin. Phys. Lett., 2005, v. 22, p. 2601.

3. Хилл К. Применение ультразвука в медицине. Физические основы. М: Мир, 1989, 282 с.
4. Учайкин В. В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008, 512 с.
5. Uchaikin V., Zolotarev M. Chance and Stability. Utrecht: VSP, 1999.