В. Л. Саваторова, А. В. Талонов, Д. Л. Широчин (Москва, МИФИ, МГГУ). **Решение уравнения теплопроводности в неоднородной среде с учетом температурной зависимости коэффициента теплопроводности.**

Рассмотрим полубесконечную среду, представляющую собой ряд периодически чередующихся, параллельных свободной поверхности ячеек периодичности, составленных из слоев различных материалов.

Решим задачу о распространении тепла вглубь среды, если в момент времени $t = 0$ температура на свободной поверхности T_1 превышает начальную температуру T_0 и затем поддерживается постоянной при $t > 0$. Предполагается, что в среде отсутствуют объемные источники тепла. Распределение температуры в одномерной среде $T(x,t)$ будет определяться нестационарным уравнением теплопроводности

$$\rho(x,T)c(x,T)\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,T)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right) \qquad (1)$$

с начальным условием

$$T(x,t)\big|_{t=0} = T_0(x), \qquad x > 0, \qquad (2)$$

и граничными условиями

$$T(x,t)\big|_{x=0} = T_1(t), \qquad t \geqslant 0, \quad T(x,t)\big|_G = 0, \quad \left[k(x,t)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right]\bigg|_G = 0, \qquad (3)$$

где квадратными скобками обозначен скачок на границе раздела слоев различных материалов G.

Для среды с периодической структурой неоднородностей в рамках метода асимптотического усреднения [1] асимптотику решения задачи (1)–(3) будем искать в виде ряда

$$T(x,\xi,t) = T^{(0)}(x,\xi,t) + \varepsilon T^{(1)}(x,\xi,t) + \cdots + \varepsilon^n T^{(n)}(x,\xi,t), \qquad (4)$$

где ε — параметр, равный отношению размера ячейки периодичности к характерному размеру задачи ($\varepsilon \ll 1$), а $\xi = x/\varepsilon$ — «быстрая переменная». Периодический характер структуры неоднородной среды находит свое отражение в том, что основные ее характеристики будут зависеть от быстрой переменной.

При подстановке разложения (4) в исходное уравнение (1), используя правило дифференцирования сложной функции и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε^{-2}, ε^{-1} и ε^0, можно получить цепочку уравнений для определения $T^{(0)}$, $T^{(1)}$, $T^{(2)}$ и последующих поправок к температуре в разложении (4). Применяя процедуру усреднения к этим уравнениям, можно получить [2] независимость нулевой поправки к температуре от быстрой переменной $T^{(0)}(x,\xi,t) = v_0(x,t)$ и ее связь с первой поправкой в виде

$$T^{(1)}(x,\xi,t) = N_1(\xi)\frac{\partial v_0}{\partial x}, \quad N_1(\xi) = \int_0^\xi \left(\frac{\widehat{K}}{k(\xi)} - 1\right) d\xi, \qquad (5),$$

где $\widehat{K} = \langle 1/k(\xi)\rangle^{-1}$ — среднее гармоническое функции $k(\xi)$.

Вид зависимости $v_0(x,t)$ находится путем решения усредненной задачи на ячейке. В [2] было показано, что в случае независимости от температуры таких характеристик среды, как плотность, теплоемкость и коэффициент теплопроводности нулевая поправка к решению задачи (1)–(3) имеет вид

$$v_0(x,t) = T_1 - (T_1 - T_0)\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\chi t}}\right), \quad \mathrm{erf}\,(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y \exp(-\zeta^2)\,d\zeta. \qquad (6)$$

С учетом возможной зависимости характеристик неоднородного материала от температуры предположим, что коэффициент теплопроводности является следующей функцией температуры:

$$k(T) = \gamma_1(\xi) + \gamma_2(\xi)/T, \tag{7}$$

где $\gamma_1(\xi)$, $\gamma_2(\xi)$ — периодические функции, определяемые физическими параметрами неоднородной среды. Согласно [3], зависимость вида (7) справедлива для диэлектриков при температурах, превышающих температуру Дебая. Плотность и теплоемкость материалов будем считать менее чувствительными к температуре [3] и потому положим равными константам по T.

Подставляя (7) в уравнение (1), получаем уравнение на ячейке периодичности:

$$\langle \rho c\rangle \frac{\partial v_0}{\partial t} = \left(\langle\gamma_1\rangle + \frac{\langle\gamma_2\rangle}{v_0}\right)\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}. \tag{8}$$

Полагая, что $\gamma_1(\xi) \gg \gamma_2(\xi)/T$, подставим приведенное ранее выражение для нулевого приближения (6) в уравнение (8):

$$\langle \rho c\rangle \frac{\partial v_0}{\partial t} = \langle\gamma_1\rangle\left(1 + \langle\gamma_2\rangle\left[\langle\gamma_1\rangle T_1\left(1 - \left(1 - \frac{T_0}{T_1}\right)\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\chi t}}\right)\right)\right]^{-1}\right)\frac{\partial^2 v_0}{\partial v^2}. \tag{9}$$

При условии небольших градиентов температур $1 - T_0/T_1 \ll 1$ можно разложить дробь в правой части (9) в ряд Тейлора:

$$\langle \rho c\rangle \frac{\partial v_0}{\partial t} = \langle\gamma_1\rangle\left(1 + \frac{\langle\gamma_2\rangle}{\langle\gamma_1\rangle T_1} + \frac{\langle\gamma_2\rangle}{\langle\gamma_1\rangle T_1}\left(1 - \frac{T_0}{T_1}\right)\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\chi t}}\right)\right)\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}. \tag{10}$$

Сделаем в (10) замену переменной $\eta = x/\sqrt{t}$ и введем обозначения

$$a = \frac{1}{2}\langle \rho c\rangle, \quad b = \langle\gamma_1\rangle + \frac{\langle\gamma_2\rangle}{T_1}, \quad c^* = \left(1 - \frac{T_0}{T_1}\right)\frac{\langle\gamma_2\rangle}{T_1}, \quad f(\eta) = \mathrm{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\chi}}\right).$$

Тогда исходная задача (1)–(3) сведется к решению усредненной задачи

$$v_0'' + \frac{a\eta}{b + c^* f(\eta)} v_0' = 0, \quad v_0(\eta)|_{\eta=0} = T_1, \quad v_0(\eta) \to T_0 \quad \text{при} \quad \eta \to \infty. \tag{11}$$

Ввиду малости параметра c^* можно пренебречь слагаемым $c^* f(\eta)$ в знаменателе. В результате уравнение (11) значительно упрощается и получается выражение для нулевой поправки к температуре в разложении (4) в виде

$$v_0 = (T_0 - T_1)\mathrm{erf}\left(\sqrt{\frac{a}{2b}}\eta\right) + T_1.$$

Используя условие (5) для нахождения первой поправки и возвращаясь к переменным x и t, получаем

$$T^{(1)} = (T_0 - T_1)\sqrt{\frac{2a}{\pi b t}}\exp\left\{-\frac{a}{2bt}x^2\right\}\int_0^{\xi}\left(\frac{\widehat{K}}{k(z)} - 1\right)dz,$$

где $k(z) = \gamma_1(z)$, $\widehat{K} = \langle 1/\gamma_1(\xi)\rangle^{-1}$.

Тогда решение задачи (1)–(3) с учетом зависимости (7) в первом приближении будет иметь вид

$$T(x,t) \approx T_1 + (T_0 - T_1)\left(\mathrm{erf}\left(\sqrt{\frac{a}{2bt}}x\right) + \sqrt{\frac{2a}{\pi b t}}\exp\left\{-\frac{a}{2bt}x^2\right\}\int_0^{x}\left(\frac{\widehat{K}}{k(z)} - 1\right)dz\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бахвалов Н. С.*, *Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984, 352 с.
2. *Власов А. Н.*, *Саваторова В. Л.*, *Талонов А. В.* Описание физических процессов в структурно неоднородных средах. М.: РУДН, 2009, 258 с.
3. *Павлов П. В.*, *Хохлов А. Ф.* Физика твердого тела. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородсого ун-та, 1993, 491 с.