С. В. Стрелков (Москва, МЭСИ). **Стохастическое моделирование сумм случайных процессов с предопределенной структурой зависимостей.**

В работе, представленной данным сообщением, рассмотрен подход к оценке сумм зависимых случайных величин (финансовых убытков) со случайным числом слагаемых на основе копульных функций (copula) и быстрого преобразования Фурье. Моделирование зависимых убытков реализовано в работе через стохастическую симуляцию коррелированных частот их наступления при предположении о независимости величин самих убытков. В [2] показано, что корреляции между величинами убытков могут быть симулированы за счет корреляций между частотами их наступления. В качестве инвариантной к копульным преобразованиям мерой зависимости случайных величин в работе выбран коэффициент τ Кендалла: $\tau(X,Y) = \mathbf{E}\,[\operatorname{sign}(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2)]$, где (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) — две пары непрерывных случайных величин с функциями распределения $F_X(x)$, $F_Y(y)$ соответственно.

В общем случае свертку произвольных зависимых вероятностных распределений удается получить только численными методами. В [3] приведено описание рекурсивного алгоритма Панжера и быстрого преобразования Фурье дискретной аппроксимации совокупного распределения убытков при фиксированном числе слагаемых. Данный алгоритм (быстрого преобразования Фурье) был использован на каждой точке симулированных траекторий зависимых частот убытков, что позволило обобщить его для случайного (коррелированного) набора слагаемых. Опишем кратко основные этапы реализованной в работе модели оценки совокупного распределения убытков.

I. Моделирование зависимых частот наступления убытков (приведено краткое описание алгоритма на примере генерирования двух зависимых случайных процессов с известными параметрами распределения $F_X(x)$, $F_Y(y)$ и предопределенной структурой зависимости, определяемой коэффициентом τ Кендалла).

1. Привести корреляцию Кендалла к линейной корреляции Пирсона: $\Sigma^{2\times 2} = (\rho_{ij}) = \sin(\pi\tau_{ij}/2)$.

2. Выполнить преобразование Холецкого корреляционной матрицы Σ к нижнетреугольному виду.

3. Генерировать пару $Z = (Z_1, Z_2)$ независимых случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение ($Z_i \approx N(0,1)$).

4. Получить пару $Y = (B\,Z)'$ зависимых случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение ($Y_i \approx N(0,1)$), с параметром корреляции τ.

5. Получить пару $U = (\Phi^{-1}(Y_1), \Phi^{-1}(Y_2))$ зависимых равномерно распределенных случайных величин с параметром корреляции τ.

6. Выполнить обратное преобразование $(X_1, Y_1) = (F_X^{-1}(U_1), F_Y^{-1}(U_2))$, получить искомую пару (X, Y) — выборку из зависимых случайных процессов $(F_X(x), F_Y(y))$ с параметром корреляции τ.

7. Повторить данный алгоритм, q раз, начиная с п. 3, для того чтобы получить искомую выборку объемом q: $(X_1, Y_1), \dots, (X_q, Y_q)$.

В современных специализированных программных продуктах часть приведенных преобразований интегрирована в пакет расчета копул. В частности, в пакете MATLAB, используемом в работе, п. 2–5 данного алгоритма объединены в рамках одной копульной функции (Гаусса): $U = copularnd('Gaussian', \Sigma, k)$, позволяющей сразу получать k пар зависимых равномерно распределенных на [0,1] случайных величин с корреляционной матрицей Σ.

II. Стохастическая аппроксимация распределения совокупной величины убытков. Предполагается, что по каждой категории риска величины убытков распределены одинаково (с функциями распределений $F_1(x), \dots, F_p(x)$) и попарно независимы. Частоты убытков распределены одинаково (с функциями распределений $N_1(x), \dots, N_p(x)$ соответственно) и имеют структуру зависимости, определяемую коэффициентом $\tau^{p\times p}$ Кендалла.

На первом этапе при помощи копул (в соответствии с алгоритмом, описанным в п. I) генерируется M векторов $\mathbf{N}^{M\times p}$ случайных частот наступления убытков с параметром зависимости τ: $\mathbf{N}_r^{1\times p} = (N_1^r, \ldots, N_p^r)$, $r = 1, \ldots, M$.

Далее проведем дискретизацию функций распределения величины убытков и разложим их в ряд Фурье (y — число точек дискретизации):

$$\widetilde{f}_X^{p\times y} = \mathrm{FFT}\,(f_X^{p\times y}) : \; f_X^{p\times y} = (f_0^w, \ldots, f_{y-1}^w, 0, \cdots, 0), \; w = 1, \ldots, p.$$

На втором этапе для каждой категории риска и каждой сгенерированной траектории частот наступления убытков $N_t^r (1 \leqslant r \leqslant p, \; 1 \leqslant t \leqslant M)$ возведем вектор $\widetilde{f}_X^{p\times y}$ в степень N_t^r и применим к нему обратное преобразование Фурье (IFFT):

$$f_{L_t^r} = \mathrm{IFFT}\,(\widetilde{g}), \quad \widetilde{g} = \overbrace{\widetilde{f}_X \cdots \widetilde{f}_X}^{N_r} = \widetilde{f}_X^{N_r}.$$

Полученный вектор $f_{L_t^r}$ задает дискретное распределение агрегированной суммы убытков для числа слагаемых N_t^r.

Выполним второй этап для всех точек траектории частот $\mathbf{N}_r^{1\times p}$. В результате будут получены M векторов, задающих дискретное распределение случайных сумм убытков для каждой точки траектории частот. На основании полученного набора дискретных распределений были рассчитаны величины математического ожидания и VaR агрегированной суммы убытков, необходимые для расчета величины экономического капитала и стоимости страхового покрытия (диапазона тарифных ставок) для рассмотренных категорий риска.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Королев В. Ю.*, *Бенинг В. Е.*, *Шоргин С. Я.* Математические основы теории риска. М.: Физматлит, 2007.
2. *Chavez-Demoulin V.*, *Embrechts P.*, *Neslehova J.* Quantitative models for operational risk: Extremes, dependence and aggregation. — J. Banking and Finance, 2005
3. *Panjer H.* Operational risk: modeling analytics. John Wiley & Sons, Inc. 2006.
4. *Shaun S. Wang.* Aggregation of correlated risk portfolios: Models and Algorithms. — In: Proceedings of the Casualty Actuarial Society, 1998, v. 85, № 163.