М. И. Толовиков (Череповец, ЧГУ). **Марковская модель случайного блуждания, связанная с матричной теоремой о деревьях.**

Определим марковский процесс на множестве состояний $\mathbf{Z}_+^d$, где $\mathbf{Z}_+$ — множество неотрицательных целых чисел. Начальным состоянием процесса с вероятностью 1 является нулевой вектор $\mathbf{0} = (0, 0, ..., 0)$. Пусть каждой паре $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, d\}^2$ поставлена в соответствие последовательность положительных чисел $(w_{ij}^{(n)})_{n=0}^{\infty}$. Вероятность перехода процесса из состояния $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_d)$ в состояние $\mathbf{n} + \mathbf{e}_j = (n_1, \ldots, n_j + 1, \ldots, n_d)$ равна $p_{\mathbf{n},\mathbf{n}+\mathbf{e}_j} = w_{jj}^{(n)} \det A_{dj}(\mathbf{n}) / \det A(\mathbf{n})$, где $\det A(\mathbf{n})$ — определитель матрицы $A(\mathbf{n}) = (a_{ij}(\mathbf{n}))_{i,j=1}^d$,

$$a_{ij}(\mathbf{n}) = \begin{cases} w_{jj}^{(n_j)} & \text{при} \quad i = d, \\ \sum_{k=1}^d w_{kj}^{(n_j)} - w_{jj}^{(n_j)} & \text{при} \quad i = j, \quad i < d, \\ -w_{ij}^{(n_j)} & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$\det A_{dj}(\mathbf{n})$ — алгебраическое дополнение элемента $a_{ij}(\mathbf{n})$ этой матрицы, $j = 1, 2, \ldots, d$. Вероятности остальных переходов равны нулю.

Вероятностям переходов можно придать следующую интерпретацию. Пусть t — ориентированное корневое дерево с множеством вершин $\{1, 2, \ldots, d\}$ и корнем j. Дуги считаем ориентированными в направлении корня. Вес дуги из вершины k в вершину i положим равным $w_{ik}^{(n_k)}$, вес корня — равным $w_{jj}^{(n_j)}$. Вес дерева определим как произведение весов всех его дуг на вес корня. На множестве T всех таких деревьев определим распределение вероятностей, при котором вероятность выбора наудачу данного дерева $t \in T$ пропорциональна его весу. Тогда $p_{\mathbf{n},\mathbf{n}+\mathbf{e}_j}$ есть вероятность выбрать наудачу дерево с корнем j.

В свою очередь, модель определенного выше марковского процесса можно описать так. Имеется полный ориентированный граф G на множестве вершин $\{1, 2, \ldots, d\}$. Пусть в некоторый момент времени состояние процесса есть $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_d)$ и веса дуг орграфа G равны $w_{ik}^{(n_k)}$. Тогда из множества деревьев T наудачу выбирается дерево t и процесс переходит в состояние $\mathbf{n} + \mathbf{e}_j$, где j — корень дерева t. При этом веса дуг, выходящих из вершины j, становятся равными $w_{ij}^{(n_j+1)}$, веса остальных дуг не изменяются. (Первоначально вес каждой дуги (i, k) равен $w_{ik}^{(0)}$.)

Пусть $(X_j^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ $(j = 1, 2, \ldots, d)$ — последовательности случайных величин, в которых величины $X_j^{(n)}$ имеют показательное распределение с параметрами $w_{jj}^{(n)}$ и независимы в совокупности. Определим случайный вектор $Z(\mathbf{n}) = (Z_1(\mathbf{n}), Z_2(\mathbf{n}), \ldots, Z_{d-1}(\mathbf{n}))$ равенствами $Z_i(\mathbf{n}) = \sum_{j=1}^d \sum_{l_j=0}^{n_j} a_{ij}(\mathbf{l}_j) X_j^{(l_j)}$, где $a_{ij}(\mathbf{l}_j)$ — элементы определенной выше матрицы, $\mathbf{l}_j = (0, \ldots, l_j, \ldots, 0)$.

Теорема. *Вероятность прохождения описанного выше марковского процесса через состояние* $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_d)$ *равна* $\det A(\mathbf{n}) p_{Z(\mathbf{n})}(0, \ldots, 0) / \prod_{j=1}^d w_{jj}^{(n_j)}$, *где* $p_{Z(\mathbf{n})}(0, \ldots, 0)$ *— плотность случайного вектора* $Z(\mathbf{n})$ *в точке* $(0, \ldots, 0)$.

Данная теорема позволяет изучить асимптотическое поведение распределения процесса, используя предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. Отметим, что частными случаями рассмотренной выше модели являются некоторые урновые модели, как ранее известные, так и новые.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 08–01–00078а.