М. И. Т о л о в и к о в (Череповец, ЧГУ). **Обобщение задачи Симона Ньюкомба и число перестановок с ограничениями типа неравенств.**

В [1] описана модель случайного процесса на множестве перестановок чисел $1, 2, \ldots, n$, обобщающая процесс выкладывания карт в стопки, рассмотренный С. Ньюкомбом (см. [2]). Здесь мы продолжаем изучение этой модели.

Вначале приведем формальное описание модели из [1] в виде неоднородного по времени марковского процесса $\{(\mathbf{r}_n, \boldsymbol{\pi}_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Состояниями процесса являются пары $(\mathbf{r}_n, \boldsymbol{\pi}_n)$, где $\mathbf{r}_n = (r_1^{(n)}, r_2^{(n)}, \ldots, r_d^{(n)})$, $\boldsymbol{\pi}_n = (\pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, \ldots, \pi_d^{(n)})$ — d-мерные векторы с целочисленными координатами, причем координаты вектора $\boldsymbol{\pi}_n$ положительны и попарно различны. Начальное состояние процесса есть вектор $(\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\pi}_1)$, где $\mathbf{r}_1 = (0, 0, \ldots, 0)$, $\boldsymbol{\pi}_1$ — случайная равновероятная перестановка на множестве $\{1, 2, \ldots, d\}$. Переходы определяются следующим образом. Пусть $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых случайных величин, в которой случайная величина ξ_n равномерно распределена на множестве $\{1, 2, \ldots, d + n + 1\}$. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{n+1} &= (r_1^{(n)}, \ldots, r_{\kappa_n}^{(n)} + I\,\{\pi_{\kappa_n}^{(n)} \geqslant \xi_n\}, \ldots, r_d^{(n)}),\\
\boldsymbol{\pi}_{n+1} &= (\pi_1^{(n)} + I\,\{\pi_1^{(n)} \geqslant \xi_n\}, \ldots, \xi_n, \ldots, \pi_d^{(n)} + I\,\{\pi_d^{(n)} \geqslant \xi_n\}),
\end{aligned}$$

где κ_n — такой индекс, для которого $(r_{\kappa_n}^{(n)}, \pi_{\kappa_n}^{(n)}) = \min_{1 \leqslant k \leqslant d}(r_k^{(n)}, \pi_k^{(n)})$ (пары упорядочены лексикографически) и $I\{\cdot\}$ обозначает индикатор события $\{\cdot\}$. Этим распределение процесса $\{(\mathbf{r}_n, \boldsymbol{\pi}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ полностью определено.

Связь с описанием из [1] следующая. Определим случайный вектор $\boldsymbol{\nu}_n = (\nu_1^{(n)}, \nu_2^{(n)}, \ldots, \nu_d^{(n)})$, где $\nu_i^{(n)}$ есть число таких $1 \leqslant s \leqslant n$, что $\kappa_s = i$. Положим

$$P_d(n_1, n_2, \ldots, n_d, r) = \mathbf{P}\left\{\nu_1^{(n)} = n_1, \nu_2^{(n)} = n_2, \ldots, \nu_d^{(n)} = n_d, \max_{1 \leqslant i \leqslant d} r_i^{(n)} = r\right\},$$

где $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_d$. Тогда вероятность $P_d(n_1, n_2, \ldots, n_d, r)$ совпадает с таким же образом обозначенной вероятностью из [1].

Теперь сформулируем полученный нами результат, связывающий вероятность $P_d(n_1, n_2, \ldots, n_d, r)$ с числом перестановок, удовлетворяющих ограничениям типа неравенств между их элементами.

Будем рассматривать перестановки $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{n+d})$ на множестве $\{1, 2, \ldots, n + d\}$. Разобьем такую перестановку на d последовательностей $(\pi_{l_i+1}, \pi_{l_i+2}, \ldots, \pi_{l_i+n_i+1})$, $i = 1, 2, \ldots, d$, где $l_1 = 0$, $l_i = n_1 + n_2 + \cdots + n_{i-1}$ при $i > 1$, длины $n_1 + 1, n_2 + 1, \ldots, n_d + 1$ соответственно, $n_1 + n_2 + \cdots + n_d = n$. Обозначим des_i и des'_i число убываний в перестановках $(\pi_{l_i+1}, \pi_{l_i+2}, \ldots, \pi_{l_i+n_i})$ и $(\pi_{l_i+1}, \pi_{l_i+2}, \ldots, \pi_{l_i+n_i+1})$ соответственно. Пусть $A_d(n_1, n_2, \ldots, n_d, r)$ есть число перестановок π, удовлетворяющих ограничениям: 1) $\max_{1 \leqslant i \leqslant d} \mathrm{des}_i = r$; 2) $\max_{i:\, \mathrm{des}_i = r} \pi_{l_i+n_i} < \min_{i:\, \mathrm{des}'_i = r} \pi_{l_i+n_i+1}$.

Теорема. $P_d(n_1, n_2, \ldots, n_d, r) = A_d(n_1, n_2, \ldots, n_d, r)/(n + d)!$, *где* $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_d$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 08–01–00078а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Толовиков М. И.* Об одной задаче, связанной с задачей Симона Ньюкомба. — Обозрение прикл. и промышл. матем., в печати.
2. *Риордан Дж.* Введение в комбинаторный анализ. М.: ИЛ, 1963.