А. В. Ж а р к о в (Ульяновск, УлГУ). **Модель нестатического факторного анализа.**

При использовании факторного анализа для обработки данных педагогического эксперимента возникает проблема определения выявленных факторов [1]. Предположим, что в ходе некоторого педагогического эксперимента по оценке знаний учащихся испытуемому предлагается решить некоторые задачи, ответить на вопросы по теме и т.д. Результат подобного «столкновения» — ученик–задача — оценивается на некоторой шкале экспертом (экзаменатором, преподавателем).

Выдвинем несколько гипотез.

Г и п о т е з а 1. Результат «столкновения» определяется некоторыми скрытыми (ненаблюдаемыми напрямую) факторами испытуемого. Все факторы вносят определенный вклад в итоговую оценку эксперта. Вклад каждого фактора пропорционален числовой величине этого фактора. Итоговая оценка x_{ij} представляет собой линейную комбинацию значений факторов:

$$x_{ij} = p_1 k_1 + p_2 k_2 \cdots + p_r k_r, \tag{1}$$

где x_{ij} — оценка i-го ученика за решение j-го задания, r — количество факторов, p_l — числовые значения скрытых факторов ученика, k_l — коэффициенты, характеризующие j-е задание.

Г и п о т е з а 2. Каждое задание, предъявляемое испытуемому, имеет определенные характеристики, соответствующие данному фактору. Эти характеристики носят объективный характер и не зависят от испытуемого; в (1) они обозначены k_l.

Таким образом, в результате контрольной работы мы имеем матрицу первичных оценок каждого испытуемого по каждому заданию $X = \{x_{ij}\}_{nm}$, где n — количество испытуемых, m — количество заданий (обычно $n \gg m$), причем все x_{ij} выражаются зависимостью (1) через некоторые скрытые факторы (их количество $r \preceq m$).

Г и п о т е з а 3. Предположим, что факторы отражают независимые стороны личности испытуемого. Под независимостью будем понимать ортогональность векторов $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$, соответствующих двум различным факторам на любой конечной совокупности испытуемых (т. е. в пространстве $\mathbf{R}^n$).

Отметим, что под статистическим факторным анализом [2] обычно понимается специальная процедура исследования корреляционной матрицы, построенной по данным эксперимента. Возможен иной подход к использованию факторного анализа без использования статистического аппарата [3]. В теории матриц [4] существует математический аппарат, удовлетворяющий всем приведенным выше гипотезам. Если мы рассмотрим матрицу первичных оценок X_{nm}, то справедливо следующее «сингулярное разложение»:

$$X = \sqrt{\gamma_1} f^{(1)} k^{(1)T} + \sqrt{\gamma_2} f^{(2)} k^{(2)T} + \cdots + \sqrt{\gamma_r} f^{(r)} k^{(r)T}, \tag{2}$$

где γ_i — положительные собственные значения матрицы $X^T X_{mm}$; $k^{(i)}$ — единичные собственные вектора этой матрицы, соответствующие γ_i, причем они образуют ортонормированный базис в $\mathbf{R}^r$; $f^{(i)}$ — единичные собственные вектора матрицы XX^T_{nn}, соответствующие тем же собственным значениям. В предположении, что все γ_i различны (на практике это не является ограничением), разложение (2) единственно.

Сопоставляя (2) и (1), видим, что (2) можно рассматривать как аналог факторного представления (1), если положить $p^{(i)} = \sqrt{\gamma_i} f^{(i)}$, причем эти векторы вычисляются без спектрального разложения матрицы XX^T_{nn}: $p^{(i)} = Xk^{(i)}$.

Если матрица X составлена только из неотрицательных чисел (в приложениях только так и бывает), то по теореме Перрона [4]: γ_1 — простое собственное значение, причем остальные собственные значения $\gamma_i < \gamma_1$. Для γ_1 собственные вектора $k^{(1)}$ и $f^{(1)}$ можно выбрать составленными только из неотрицательных чисел. Этот факт дает возможность трактовать $p^{(1)}$ в первом слагаемом в (2) как «фактор уровня знаний» учащегося, что и является прообразом его итоговой оценки (на пропорциональной шкале) за данную контрольную работу. Коэффициенты вектора $k^{(1)}$ будут тогда уровнями «решаемости» соответствующих заданий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Михеев В. И.* Моделирование и методы теории измерений в педагогике. М.: Едиториал УРСС, 2004, 200 с.
2. *Лоули Д.*, *Максвелл А.* Факторный анализ как статистический метод. М.: Мир, 1967, 144 с.
3. *Жарков А. В.* Нестатистический факторный анализ в задаче оценивания успешности обучения. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2007, т. 14, в. 1, с. 110–111.
4. *Хорн Р.*, *Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989, 656 с.