С. Г. Геворкян (Обнинск, ИАТЭ НИЯУ МИФИ). **Анализ динамической модели для числа эффективных доз за фиксированный промежуток времени.**

В связи с неопределенностью исходной информации предполагаются различные модели зависимости доза-эффект [1], которые дают различный прогноз выхода стохастических эффектов. Выход стохастических эффектов в области малой дозы оценивается с помощью модели индивидуального риска, коллективного риска и различными статистическими методами. Однако с помощью моделей индивидуального и коллективного риска нельзя оценить момент выхода стохастических эффектов. Момент выхода стохастических эффектов можно оценить с помощью выбора оптимальных алгоритмов функционирования системы, системного анализа и динамической модели. Однако для этого необходима динамическая модель для числа эффективных доз за фиксированный промежуток времени.

В работе, представленной данным сообщением, мы рассмотрим динамическую модель для числа эффективных доз за фиксированный промежуток времени. В модели фиксируется взаимодействие числа эффективных доз, поступивших за различные непересекающиеся промежутки времени, игнорируется взаимодействие индивидуальных облученных. Поэтому она применена и для описания процесса поступления эффективных доз от отдельно облученного, если облученный за время своего существования может произвести несколько эффективных доз.

Обозначим $\nu(t)$ число эффективных доз, поступивших за время $(0,t)$. Через эту переменную можно выразить и более сложную величину $\nu(t_1,t_2)$, равную числу эффективных доз, поступивших за промежуток (t_1,t_2).

Допустим, что процесс поступления эффективных доз является стационарным, т. е. распределение случайной величины $\nu(t_1,t_2)$ зависит от длины t_2-t_1 рассматриваемого промежутка (t_1,t_2) и не зависит от его положения на оси времени. Иными словами, распределение числа поступивших эффективных доз за любой промежуток $(r,r+t)$ зависит только от t; обозначим $P(t)=\mathbf{P}\left\{\nu(r,r+t)=n\right\}$. Процесс является ординарным в том смысле, что поступление двух или более эффективных доз за малый промежуток времени Δt практически невозможно. Математически это можно выразить равенством $\mathbf{P}\left\{\nu(r,r+\Delta t)\geqslant 2\right\}=O\left(\Delta t\right)$. Процесс поступления эффективных доз не обладает последствием, т. е. величины $\nu(t_1,t_2),\nu(t_2,t_3),\ldots,\nu(t_{n-1},t_n)$, $t_1<t_2<\cdots<t_n$, выражающие число эффективных доз, поступивших за непересекающиеся промежутки времени, независимы. Введенные предположения довольно естественны как при описании поступления эффективных доз от всей популяции облученных, так и при описании поступления эффективных доз от индивидуального облученного в случае, когда облученный за время своего существования может произвести несколько эффективных доз.

Как мы сейчас покажем, описанная выше динамическая модель процесса поступления эффективных доз с необходимостью влечет, что для некоторого

$$P_n(t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}, \tag{1}$$

т. е. распределение числа эффективных доз, поступивших за фиксированный промежуток времени, обязательно является пуассоновским. Прежде всего, отметим следующее свойство пуассоновского процесса:

$$P_n(u+v)=P_n(u)P_0(v)+P_{n-1}(u)P_1(v)+\cdots+P_0(u)P_n(v). \tag{2}$$

Итак, используя свойства пуассоновского распределений, мы доказали справедливость желаемого результата (1) для $n=0$. Чтобы доказать справедливость (1) при всех n, мы получили дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет распределение числа эффективных доз. С этой целью в равенстве (2) положим $u = t$, $v = \Delta t$:

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t)P_0(\Delta t) + P_{n-1}(t)P_1(\Delta t) + \cdots + P_0(t)P_n(\Delta t).$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим

$$P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t), \quad n \geqslant 1. \tag{3}$$

Поскольку уже известно, из (3) можно последовательно определить все вероятности $P_n(t)$; при $n \geqslant 1$ начальное условие, очевидно, имеет вид $P_n(0) = 0$. Технически это удобно сделать с помощью производящей функции числа эффективных доз $\pi(z,t) = Ez^{\nu(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n(t)$. Умножая обе части (3) на z^n и суммируя по $n = 0, 1, 2, \ldots$, мы превратим систему из бесконечного числа дифференциальных уравнений с бесконечным числом неизвестных функций в одно дифференциальное уравнение с одной неизвестной функцией $\pi(z,t)$: $\pi_z'(z,t) = \lambda(z-1)\pi(z,t)$. Отсюда $\pi(z,t) = \pi(z,0)e^{\lambda(z-1)t}$. Поскольку $\pi(z,0) = P_0(0) + zP_1(0) + z^2P_2(0) + \cdots = 1 + z \cdot 0 + z^2 \cdot 0 + \cdots = 1$, мы окончательно получим $\pi(z,t) = e^{\lambda(z-1)t}$. Справа стоит производящая функция распределения Пуассона с параметром λt, что завершает доказательство формулы (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Василенко И.Я.* Радиобиологические проблемы малых доз радиации. — Военно-мед. журн., 1993, № 4, с. 28–30.