В. К. Доманский, **В. Л. Крепс** (Санкт-Петербург, СПбЭМИ РАН). **Решения игр торга двумя рисковыми активами. Общий случай.**

Получены решения повторяющихся игр $G_\infty^{a,b}(\mathbf{p})$ с неполной информацией у игрока 2, к которым сводятся описанные в [1] торги неограниченной продолжительности двумя рисковыми активами (акциями) между двумя биржевыми игроками, в общей постановке.

Случайные ликвидные цены двух торгуемых рисковых активов равны $a(s)$ и $b(s)$, где s — состояние, выбираемое случайным ходом на весь период торгов согласно вероятностному распределению $\mathbf{p}$ на двумерной целочисленной решетке $\mathbf{Z}^2$, известному обоим игрокам. Игрок 1 (инсайдер) знает значения случайных цен обеих акций. Игрок 2 знает, что игрок 1 является инсайдером. Игроки делают целочисленные векторные ставки.

Решение игры строится на базе приведенных в [1] решений частных случаев таких игр с распределениями, имеющими не более, чем трехточечные носители, в выпуклую комбинацию которых раскладывается исходное распределение $\mathbf{p}$ (см. [2]).

Мы описываем алгоритм построения оптимальных стратегий информированного игрока 1 в играх $G_\infty^{a,b}(\mathbf{p})$ с начальным распределением $\mathbf{p}$ общего вида. Алгоритм основан на полученном разложении распределений $\mathbf{p}$ и определяет последовательность действий игрока 1 в зависимости от выбранного случаем состояния $s \in \mathbf{Z}^2$.

Нами получен следующий результат.

Теорема. *Если дисперсии случайных цен акций a и b конечны, $\mathbf{D}_{\mathbf{p}^1}[a] < \infty$, $\mathbf{D}_{\mathbf{p}^2}[b] < \infty$, то игры $G_\infty^{a,b}(\mathbf{p})$ имеют значения $V_\infty^{a,b}(\mathbf{p})$, определяемые соотношениями $V_\infty^{a,b}(\mathbf{p}) = V_\infty^{a}(\mathbf{p}^1) + V_\infty^{b}(\mathbf{p}^2)$. Если математические ожидания $\mathbf{E}_{\mathbf{p}^1}[a]$, $\mathbf{E}_{\mathbf{p}^2}[b]$ цен акций обоих типов — целые числа, то $V_\infty^{a,b}(\mathbf{p}) = (1/2)(\mathbf{D}_{\mathbf{p}^1}[a] + \mathbf{D}_{\mathbf{p}^2}[b])$. Оба игрока имеют оптимальные стратегии.*

На первом шаге $t=1$ своей оптимальной стратегии игрок 2 делает ставку (k_1, k_2), где k_1 — целая часть математического ожидания $\mathbf{E}_{\mathbf{p}^l}[a]$ и k_2 — целая часть математического ожидания $\mathbf{E}_{\mathbf{p}^l}[b]$. На последующих шагах l-я компонента, $l = 1, 2$, ставки игрока 2 зависит только от последней наблюдаемой пары l-х компонент ставки игрока 1 i_{t-1}^l и его собственной ставки j_{t-1}^l, $t = 2, 3, \ldots$:

$$j_t^l = \begin{cases} j_{t-1}^l - 1 & \textit{при} \quad i_{t-1}^l < j_{t-1}^l, \\ j_{t-1}^l & \textit{при} \quad i_{t-1}^l = j_{t-1}^l, \\ j_{t-1}^l + 1 & \textit{при} \quad i_{t-1}^l > j_{t-1}^l. \end{cases}$$

Оптимальная стратегия игрока 1 в игре $G_\infty^{a,b}(\mathbf{p})$ является выпуклой комбинацией его оптимальных стратегий в таких играх с распределениями, имеющими не более, чем трехточечные носители, в выпуклую комбинацию которых раскладывается исходное распределение $\mathbf{p}$.

Полученные решения повторяющихся игр с неполной информацией, описывающих модели многошаговых торгов между двумя биржевыми игроками, на которых торгуется два типа акций, демонстрируют справедливость гипотезы [3] о возможном эндогенном происхождении случайных флуктуаций цен на финансовых рынках.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крепс В. Л.* Решения игр торга двумя рисковыми активами. Случаи двух и трех состояний. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2010, т. 17, в. 2, с. 000–000.
2. *Доманский В. К.* Разложение распределений на решетке $\mathbf{Z}^2$ и модели биржевых торгов. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 4, с. 644–646.
3. *De Meyer B.*, *Moussa Saley H.* On the strategic origin of Brownian motion in finance. — Internat. J. Game Theory, 2003, v. 31, p. 285–319.