А. А. З а м ы ш л я е в а (Челябинск, ЮУрГУ). **Начально-конечная задача для одного уравнения соболевского типа на графе.**

Пусть $G = G(\mathcal{V};\mathcal{E})$ — конечный связный ориентированный граф, где $\mathcal{V} = \{V_i\}$ — множество вершин, а $\mathcal{E} = \{E_j\}$ — множество дуг. Мы предполагаем, что каждая дуга имеет длину $l_j > 0$ и толщину $d_j > 0$. На графе G рассмотрим уравнения

$$\lambda u_{jtt} - u_{jxxtt} = \alpha(u_{jxxt} - \lambda' u_{jt}) + \beta(u_{jxx} - \lambda'' u_j) \quad \text{для всех } x \in (0, l_j), \quad t \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

Для уравнений (1) в каждой вершине V_i зададим краевые условия

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j u_{jx}(0,t) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} d_k u_{kx}(l_k,t) = 0, \tag{2}$$

$$u_s(0,t) = u_j(0,t) = u_k(l_k,t) = u_m(l_m,t), \tag{3}$$

для всех $E_s, E_j \in E^\alpha(V_i)$, $E_k, E_m \in E^\omega(V_i)$. Здесь $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ — множество дуг с началом (концом) в вершине V_i.

Задачу (2)–(3) для уравнений (1) удается редуцировать к линейному уравнению соболевского типа второго порядка [1]

$$Au'' = B_1 u' + B_0 u, \tag{4}$$

причем пучок операторов $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен и ∞ является устранимой особой точкой A-резольвенты пучка $\vec{B}$ [2].

Пусть $\{\lambda_k\}$ — собственные значения оператора D, определенного формулой

$$\langle Du, v\rangle = \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx}(x)v_{jx}(x) + a u_j(x) v_j(x))\, dx,$$

занумерованные по неубыванию с учетом их кратности, а $\{\varphi_k\}$ — соответствующие им ортонормированные в смысле $L_2(G)$ функции.

Для постановки начально-конечной задачи [3] необходимы проекторы P и P_0. Построим проектор $P = \mathrm{I} - \sum_{\lambda_k = \lambda - a} \langle \cdot, \varphi_k\rangle \varphi_k$.

Для построения проектора P_0 выберем такую область $\Gamma_0 \subset \mathrm{C}$, содержащую конечное множество точек A-спектра $\sigma_0^A(\vec{B})$, что $\partial\Gamma_0 \cap \sigma_0^A(\vec{B}) = \varnothing$. Как нетрудно видеть, область Γ_0 можно выбрать такой, что $\partial\Gamma_0 = \gamma_0$ — контур. Построим проектор $P_0 = \sum_{\lambda_k^i} \langle \cdot, \varphi_k^i\rangle \varphi_k^i$. Здесь $\{\lambda_k^i\} = \{\lambda_k \in \sigma(D)\colon \mu_k^{1,2} \in \sigma_0^A(\vec{B}),\ \lambda_k \neq \lambda - a\}$.

Рассмотрим начально-конечную задачу

$$\begin{aligned} P_0(\dot u(0) - u_1^0) = 0, \quad P_0(u(0) - u_0^0) = 0,\\ P_1(\dot u(T) - u_1^T) = 0, \quad P_1(u(T) - u_0^T) = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $P_1 = P - P_0$.

Теорема. *При любых* $\alpha, \beta \in \mathrm{B}\backslash\{0\}$ *и таком* $\lambda \in \mathrm{R}$, *что выполнено условие: либо* (i) $0 \notin \sigma(A)$, *либо* (ii) $0 \in \sigma(A)$ *и* $\lambda = \lambda'$, *но* $\lambda \neq \lambda''$, *и любых* $T \in \mathbf{R}_+$, $v_k^0, v_k^T \in \mathfrak{V}$, $k = 0, 1$, *существует единственное решение задачи* (5) *для уравнения* (1) *с условиями* (2)–(3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sviridyuk G. A.*, *Fedorov V. E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht-Boston-Tokyo-Keln: VSP, 2003.
2. *Замышляева А. А.* Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа второго порядка. — Вычислит. технологии, 2003, т. 8, № 4, с. 45–54.
3. *Загребина С. А.* О задаче Шоуолтера–Сидорова. — Изв. вузов. Математика, 2007, № 3, с. 22–28.