А. В. З а х а р о в (Уфа, ИМ с ВЦ УНЦ РАН)**. Пример построения кубатурной формулы для вероятностного представления решений уравнений математической физики.**

Пусть $\xi(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ — случайная величина, принимающая значения из множества T и имеющая плотность распределения $p_\xi(x)$, $x \in T$. Предположим, что плотность $p_\xi(x)$ известна в конечном наборе точек $\{x_i\}_{i=1}^n$ множества T, и требуется оценить математическое ожидание $\mathbf{E}\,\xi$. Подобные задачи возникают как в прикладных науках [1], так и в теоретической математике. Например, иногда вероятностное представление решения параболических дифференциальных уравнений является простым математическим ожиданием от функционала винеровского процесса, имеющего известное распределение [2]. В этом случае метод кубатурных формул может иметь порядок сходимости вплоть до $1/n^2$ (метод Монте-Карло — $1/\sqrt{n}$).

Поскольку математическое ожидание представляет собой интеграл, его можно оценить при помощи кубатурной формулы

$$\mathbf{E}\,\xi = \int_T x p_\xi(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^n x_i p_\xi(x_i)|\Delta_i|, \tag{1}$$

где $\{\Delta_i\}_{i=1}^n$ — разбиение T на подмножества, $|\Delta_i|$ — мера множества Δ_i, $i = 1, 2, \dots, n$.

Для заданной плотности распределения $p_\xi(x)$, $x \in [a, b]$, ошибку кубатурной формулы (1) определим следующим образом:

$$\varepsilon_n = \left| \int_T x p_\xi(x)\,dx - \sum_{i=1}^n x_i p_\xi(x_i)|\Delta_i| \right|. \tag{2}$$

Последовательность кубатурных формул вида (1) $\{\overline{x}_i^n,\ \overline{\Delta}_i^n\}_{i=1}^n$ с ошибкой $\overline{\varepsilon}_n$, $n = 1, 2, \dots$, назовем *асимптотически оптимальной*, если для любой другой последовательности кубатурных формул вида (1) $\{x_i^n, \Delta_i^n\}_{i=1}^n$ с ошибкой ε_n, $n = 1, 2, \dots$, верно неравенство $\lim_{n\to\infty} \overline{\varepsilon}_n/\varepsilon_n \leqslant 1$.

В работе предложены методы построения кубатурных формул (последовательности кубатурных формул), оптимальных в асимптотическом смысле применительно к указанным задачам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wackernagel H.* Multivariate Geostatistics. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1995.
2. *Скороход А. В.* Марковские процессы и вероятностные приложения в анализе. — Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, 1989, т. 43, с. 147–188.