В. Л. К р е п с (Санкт-Петербург, СПбЭМИ РАН). **Решения игр торга двумя рисковыми активами. Случаи двух и трех состояний.**

Исследуются модели многошаговых торгов между двумя биржевыми игроками, на которых торгуется два типа акций. Случайные ликвидные цены акций могут принимать произвольные неотрицательные целочисленные значения. Эти цены акций обоих типов a и b зависят от «состояния природы» s, которое выбирается случайным ходом на весь период торгов перед их началом из множества $S = \mathbf{Z}^2$ точек двумерной целочисленной решетки.

Оба игрока знают распределение $\mathbf{p} \in \Delta(S)$ вероятностей состояний. Кроме того, игрок 1 является инсайдером. Он знает «состояние природы» s и, тем самым, ликвидные цены $a(s)$ и $b(s)$ обоих типов акций. Игрок 2 не имеет этой информации, он знает, что игрок 1 является инсайдером.

Затем игроки ведут между собой многошаговые торги. На каждом шаге торгов игроки независимо и одновременно делают векторные ставки — называют свои цены акций обоих типов. Назвавший более высокую цену акции данного типа покупает за эту цену одну акцию этого типа у противника. Если игроки назвали одинаковые цены акции того или иного типа, то передачи акции этого типа не происходит.

После каждого шага пара названных векторных ставок объявляется обоим игрокам. Допустимы любые целочисленные векторные ставки. Игроки стремятся максимизировать цену своего итогового портфеля — деньги плюс стоимость приобретенных рисковых активов, рассчитанная по их ликвидным ценам.

Такая n-шаговая модель описывается антагонистической повторяющейся игрой $G_n^{a,b}(\mathbf{p})$ с неполной информацией у второго игрока [1]. Ограниченность значений $V_n^{a,b}(\mathbf{p})$ этих игр при $n \to \infty$ (см. [2]) позволяет рассматривать торги не ограниченной заранее продолжительности, которые сводятся к бесконечным играм $G_\infty^{a,b}(\mathbf{p})$.

В работе, представленной данным сообщением, приводятся решения для частных случаев таких игр, а именно, для игр с двумя состояниями и для игр с тремя состояниями (распределение $\mathbf{p}$ имеет двух- и, соответственно, трехточечный носитель).

Пусть носитель распределения $\mathbf{p} = (p_{ij})$ содержит две точки. Не ограничивая общности, можем считать, что одна из этих точек $(0,0)$. Таким образом, в игре возможны два состояния $(0,0)$ и (m_1, m_2), где $m_1 \neq m_2$ — целые числа, причем $m_1 > 0$. Распределение $\mathbf{p}$ описывается скалярным параметром p — вероятностью состояния (m_1, m_2). Рассмотрим решетку $D(m_1, m_2) \subset [0,1]$,

$$D(m_1, m_2) = \{k/m_1,\ k = 0, \dots, m_1\} \bigcup \{l/|m_2|,\ l = 0, \dots, m_2\}.$$

Теорема 1. *Значение* $V_\infty^{m_1 m_2}(p)$ *игры* $G_\infty^{m_1 m_2}(p)$ *равно сумме* $V_\infty^{m_1 m_2}(p) = V_\infty^{m_1}(p) + V_\infty^{|m_2|}(p)$ *значений игр с одним рисковым активом* $G_\infty^{m_1}(p)$ *и* $G_\infty^{|m_2|}(p)$. *Оба игрока имеют оптимальные стратегии. Оптимальная стратегия игрока* 2 *представляет собой сочетание его оптимальных стратегий для игр с активами одного типа* $G_\infty^{m_1}(p)$ *и* $G_\infty^{|m_2|}(p)$. *Мартингал апостериорных вероятностей состояния* (m_1, m_2), *порождаемый оптимальной стратегией игрока* 1, *представляет собой асимметричное случайное блуждание по смежным точкам решетки* $D(m_1, m_2) \subset [0,1]$ *с поглощением в крайних точках.*

Пусть теперь носитель распределения $\mathbf{p} = (p_{ij})$ содержит три точки: $\mathbf{z}_1 = (x_1, y_1)$, $\mathbf{z}_2 = (x_2, y_2)$, $\mathbf{z}_3 = (x_3, y_3)$, $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \in \mathbf{Z}^2$. Положим $\mathbf{z}_3 = (0,0)$. Пусть также для определенности $x_1 > y_1 > 0$, $y_2 > x_2 > 0$.

Для точки $\mathbf{w} = (u, v) \in \mathbf{R}^2$ обозначим $\mathbf{p}(\cdot|\mathbf{w})$ вектор ее барицентрических координат с базой $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{0}$.

Теорема 2. *Значение* $V_\infty^{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}(\mathbf{p})$ *игры* $G_\infty^{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}(\mathbf{p})$ *с тремя состояниями* $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$ *и* $\mathbf{0}$ *равно сумме значений двух игр с одним рисковым активом. Для точки* $\mathbf{w} =$

$(u,v) \in \mathbf{Z}^2$, находящейся внутри треугольника $\triangle(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,\mathbf{z}_3)$,

$$V_\infty^{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}(\mathbf{p}(\cdot|\mathbf{w})) = \frac{1}{2}\Big((x_1^2+y_1^2)p(\mathbf{z}_1|\mathbf{w}) + (x_2^2+y_2^2)p(\mathbf{z}_2|\mathbf{w}) - (u^2+v^2)\Big).$$

На границе треугольника $\triangle(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,\mathbf{0})$ функция $V_\infty^{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}(\mathbf{p})$ определяется по теореме 1. В остальных точках $\mathbf{w}=(u,v) \in \triangle(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,\mathbf{0})$ эта функция является наименьшей непрерывной вогнутой мажорантой ее значений в точках $\mathbf{w}=(u,v)\in\mathbf{Z}^2$ и точках границы треугольника $\triangle(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,0)$. Оба игрока имеют оптимальные стратегии. Оптимальная стратегия игрока 2 представляет собой сочетание его оптимальных стратегий для игр с активами одного типа. Мартингал апостериорных математических ожиданий, порождаемый оптимальной стратегией игрока 1, представляет собой симметричное случайное блуждание по точкам решетки $\mathbf{Z}^2$, находящимся внутри треугольника $\triangle(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,\mathbf{z}_3)$. Симметрия этого блуждания нарушается при попадании на границу треугольника. С момента первого попадания на границу игра переходит в одну из игр с распределениями $\mathbf{p}$ с двухточечными носителями $\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2$, или $\mathbf{z}_2,\mathbf{0}$, или $\mathbf{0},\mathbf{z}_1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aumann R. J.*, *Maschler M.* Repeated Games with Incomplete Information. Cambridge, MA–London: MIT Press, 1995.
2. *Доманский В. К.*, *Крепс В. Л.* Многошаговые торги с несколькими рисковыми активами. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 2, с. 324–325.