Е. В. Кутырева (Москва, ТВП). **О максимизации одной пороговой функции от двух переменных.**

Данная задача входит в круг задач упорядочения объектов разнообразной природы, которые возникают в процессе решения различных математических проблем (см., например, [2]). В частности, в некоторых задачах статистики при построении статистических критериев и доверительных интервалов требуется упорядочить значения вероятностей, которые выражаются линейными псевдобулевыми формами. Один из подходов к решению такой задачи для одной линейной формы от булевых переменных предложен в работе [1].

Пусть $\mathbf{R}$ — множество действительных чисел, $\mathbf{N}_0 = \{\mathbf{N} \cup 0\}$, где $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел, $C \in \mathbf{R}$ — некоторая константа. Рассмотрим функцию f_d: $\mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0 \to \mathbf{R}$, определенную следующим образом:

$$f_d(k_1, k_2) = \begin{cases} k_1 + dk_2, & k_1 + dk_2 \leqslant C, \\ 0, & k_1 + dk_2 > C, \end{cases} \qquad d \in \mathbf{R}.$$

Обозначим (k_1^*, k_2^*) пару, для которой выполняется $\max_{(k_1,k_2)\in \mathbf{N}_0\times\mathbf{N}_0} f_d(k_1, k_2) = f_d(k_1^*, k_2^*)$. Тогда для пары (k_1^*, k_2^*) справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. *Неизвестное* k_1^* *может принимать значения из множества* $\{[C - [C/d]d], \ldots, [C]\}$.

Обозначим g_{rem} остаток от деления некоторого числа $g \in \mathbf{R}$ на d, $Q_{rem} = (C - [C])_{rem}$.

Утверждение 2. *Равенство* $(k_1^*, k_2^*) = ([C] - j, [(C - [C] + j)/d])$, *где* j *может принимать значения из множества* $\{0, \ldots, [C] - [C - [C/d]d]\}$, *верно в том и только в том случае, если для любого* $i = 0, 1, \ldots, [C] - [C - [C/d]d]$, $i \neq j$, *выполнено одно из трех условий*:

$$1)\ \begin{cases} Q_{rem} + j_{rem} \geqslant 1, \\ Q_{rem} + i_{rem} \geqslant 1, \\ i_{rem} \geqslant j_{rem}, \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} Q_{rem} + j_{rem} \geqslant 1, \\ Q_{rem} + i_{rem} < 1, \end{cases} \quad 3)\ \begin{cases} Q_{rem} + j_{rem} < 1, \\ Q_{rem} + i_{rem} < 1, \\ i_{rem} \geqslant j_{rem}. \end{cases}$$

Если неизвестное k_1^* принимает максимально возможное значение, то справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. *Равенство* $(k_1^*, k_2^*) = ([C], [(C - [C])/d])$ *верно в том и только в том случае, если для всех* $i = 1, 2, \ldots, [C] - [C - [C/d]d]$ *выполняется условие* $Q_{rem} + i_{rem} < 1$.

Если неизвестное k_1^* принимает минимально возможное значение, то справедливо следующее утверждение.

Следствие 2. *Равенство* $(k_1^*, k_2^*) = ([C - [C/d]d], [(C - [C - [C/d]d])/d])$ *верно в том и только в том случае, если выполнены два условия*:

1) $Q_{rem} + ([C] - [C - [C/d]d])_{rem} \geqslant 1$;

2) *для всех* $i = 1, 2, \ldots, [C] - [C - [C/d]d] - 1$

$$\text{либо}\ \ Q_{rem} + i_{rem} \geqslant 1, \ \ \text{либо}\ \ Q_{rem} + i_{rem} < 1 \ \ \text{и}\ \ [C] - [C - [C/d]d])_{rem} + i_{rem} \leqslant 1/2.$$

Введем теперь множество чисел $\mathbf{M} = \{0, 1, 2, \ldots, r\}$, $|\mathbf{M}| = r + 1$, $r \in \mathbf{N}$, и рассмотрим функцию $f_d^{(1)}$: $\mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbf{R}$, определенную следующим образом:

$$f_d^{(1)}(k_1, k_2) = \begin{cases} k_1 + dk_2, & k_1 + dk_2 \leqslant C, \\ 0, & k_1 + dk_2 > C. \end{cases}, \qquad d \in \mathbf{R}.$$

Пусть $\max_{(k_1,k_2)\in \mathbf{M}\times\mathbf{M}} f_d^{(1)}(k_1, k_2) = f_d^{(1)}(k_1^*, k_2^*)$. Обозначим $k_2^{\max} = \min\{r, [C/d]\}$, $k_1^{\max} = \min\{r, [C]\}$, $k_1^{\min} = \min\{r, [C - k_2^{\max} d]\}$, $P_{rem} = (C - k_1^{\max})_{rem}$. Тогда для пары (k_1^*, k_2^*) справедливо утверждение, аналогичное утверждению 2.

Пусть $i^{(r)} \in \mathbf{N}_0$ — минимальное число, удовлетворяющее условию $[(C - k_1^{\max} + i^{(r)})/d] > r$. Обозначим $q = r - [(C - k_1^{\max})/d]$.

Утверждение 3. *Равенство* $(k_1^*, k_2^*) = (k_1^{\max} - j, [(C - k_1^{\max} + j)/d])$, *где* j *может принимать значения из множества* $\{0, \ldots, k_1^{\max} - k_1^{\min}\}$, *верно в том и только в том случае, если* $[(C - k_1^{\max} + j)/d] \leqslant r$ *и для любого* $i = 0, 1, \ldots, \min\{i^{(r)} - 1, k_1^{\max} - k_1^{\min}\}$, $i \neq j$, *выполнено одно из трех условий*:

$$1)\ \begin{cases} P_{rem} + j_{rem} \geqslant 1, \\ P_{rem} + i_{rem} \geqslant 1, \\ i_{rem} \geqslant j_{rem}, \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} P_{rem} + j_{rem} \geqslant 1, \\ PQ_{rem} + i_{rem} < 1, \end{cases} \quad 3)\ \begin{cases} P_{rem} + j_{rem} < 1, \\ P_{rem} + i_{rem} < 1, \\ i_{rem} \geqslant j_{rem}, \end{cases}$$

и при $i^{(r)} \leqslant k_1^{\max} - k_1^{\min}$ *выполнено одно из двух условий*

$$1)\ \begin{cases} P_{rem} + j_{rem} < 1, \\ i^{(r)} \geqslant d(q + j_{rem}), \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} P_{rem} + j_{rem} \geqslant 1, \\ i^{(r)} \geqslant d(q + j_{rem} - 1). \end{cases}$$

Утверждение 4. *Пусть* $[(C - k_1^{\max} + j)/d] > r$. *Равенство* $(k_1^*, k_2^*) = (k_1^{\max} - j, r)$, *где* j *может принимать значения из множества* $\{0, \ldots, k_1^{\max} - k_1^{min}\}$, *верно в том и только в том случае, если для любого* $i = 0, 1, \ldots, \min\{i^{(r)} - 1, k_1^{\max} - k_1^{\min}\}$, $i \neq j$, *выполнено одно из двух условий*

$$1)\ \begin{cases} P_{rem} + i_{rem} < 1, \\ j \leqslant (i_{rem} + q)d, \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} P_{rem} + i_{rem} \geqslant 1, \\ j \leqslant (i_{rem} + q - 1)d, \end{cases}$$

и при $i^{(r)} \leqslant k_1^{\max} - k_1^{\min}$ *выполнено условие* $i^{(r)} \geqslant j$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зубков А. М., Соколов Д. В.* Алгоритмы частичной сортировки множеств сумм. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2006, т. 13, в. 1, с. 318–319.
2. *Кнут Д. Э.* Искусство программирования. Т. 2. М.–СПб.–Киев: Вильямс, 2003, 832 с.