О. В. Н а з а р ь к о (Ростов-на-Дону, РГСУ). **О некоторых фактах теории деформированных мартингалов.**

Пусть дана фильтрация $(\Omega, (\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty})$. Семейство $\mathbf{Q} = (Q^{(n)}, \mathcal{F}_{(n)})_{n=0}^{\infty}$ вероятностных мер $Q^{(n)}$ на $\mathcal{F}_n$ будем называть *деформацией* 1-*го рода* — D1 (соответственно, 2-*го рода* — D2), если для любых $n \in \mathcal{N} = \{0, 1, \dots\}$ выполняется соотношение $Q^{(n+1)}|_{\mathcal{F}_n} \ll Q^{(n)}$ (соответственно, $Q^{(n+1)}|_{\mathcal{F}_n} \gg Q^{(n)}$). Если $\mathbf{Q}$ есть одновременно D1 и D2, то такую деформацию будем называть *слабой* — WD. Введем процесс плотностей $(h_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ (соответственно, $(h^{(n)}, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty})$): $dQ^{(n+1)}|_{\mathcal{F}_n} = h_n\, dQ^{(n)}$ (соотвеьственно, $dQ^{(n)} = h^{(n)}\, dQ^{(n+1)}|_{\mathcal{F}_n}$).

Обозначим $E^n f = E^{Q^{(n)}} f$ и $E^n_{n-1} f = E^{Q^{(n)}}[f|\mathcal{F}_{n-1}]$. Пусть процесс $\mathbf{Z} = (Z_n, \mathcal{F}_n, Q^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ входит в $L_1(\Omega, \mathbf{Q})$, т. е. $E^n(|Z_n|) < \infty$ для любых $n \in \mathcal{N}$. Если $\mathbf{Q}$ есть D1 (соответственно, D2), то процесс $\mathbf{Z}$ будем называть *деформированным мартингалом* 1-*го рода* — DM1 (соответственно, 2-*го рода* — DM2) при выполнении для любых $n \in \mathcal{N}$ равенств $E^{Q^{(n+1)}}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n] = Z_n\ Q^{(n+1)}|_{\mathcal{F}_n}$-п. н. (соответственно, $E^{Q^{(n+1)}}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n] = Z_n\ Q^{(n)}$-п. н.). Аналогично определяются суб- и супермартингалы 1-го и 2-го рода — DSubM1, DSupM1, DSubM2, DSupM2.

Предложение 1. *Если* $\mathbf{Q}$ *есть* D2 *с ограниченными плотностями* (BD2) *и* $\mathbf{Z}$ — DM2, *то для любых* $k, n \in \mathcal{N}$ $(k < n)$ *выполняется равенство* $E^n_k Z_n := E^{k+1}_k E^{k+2}_{k+1} \cdots E^n_{n-1} Z_n = Z_k\ Q^{(k)}$*-п. н. Аналогичные соотношения выполняются для* DSubM2 *и* DSupM2.

Предложение 2. *Пусть* $(Z^{(\alpha)}_n, \mathcal{F}_n, Q^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ — *некоторое семейство* D-SupM1 (*соответственно*, DSupM2). *Предположим, что* $Z_n := \operatorname{ess\,inf}_\alpha Z^{(\alpha)}_n \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_n, Q^{(n)})$ *для любых* $n \in \mathcal{N}$. *Тогда процесс* $(Z_n, \mathcal{F}_n, Q^{(n)}$ — DSupM1 (*соответственно*, DSupM2).

Предложение 3. *Пусть* $\mathbf{Z}$ — DM1 *или* DM2 (*соответственно*, DSubM1 *или* DSubM2) *и* φ — *такая выпуклая вниз* (*соответственно, выпуклая вниз возрастающая*) *функция на* $\mathbf{R}^1$, *что* $\varphi \circ Z_n \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_n, Q^{(n)})$ *для любых* $n \in \mathcal{N}$. *Тогда процесс* $(\varphi \circ Z_n, \mathcal{F}_n, Q^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ — *деформировнный субмартингал того же рода, что и* $\mathbf{Z}$.

Процесс $\mathbf{A} = (A_n, \mathcal{F}_n, Q^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ будем называть *деформированным возрастающим предсказуемым процессом* (DIPP), если для любых $n \in \mathcal{N}$: $A_n \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_n, Q^{(n)})$, $A_n \leqslant A_{n+1}\ Q^{(n+1)}$-п. н., A_n является $\mathcal{F}_{n-1}$-измеримой с. в. ($\mathcal{F}_{-1} := \{\Omega, \varnothing\}$) и $A_0 = 0$.

Теорема 1 (разложение Дуба для деформированных субмартингалов). *Предположим, что* $\mathbf{Q}$ *есть* D1 *с ограниченными плотностями* (BD1). *Пусть* $\mathbf{Z}$ — DSubM1. *Тогда существуют такие единственный* DM1 $\mathbf{M} = (M_n, \mathcal{F}_n, Q^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ *и единственный* DIPP $\mathbf{A} = (A_n, \mathcal{F}_n, Q^{(n)})_{n=0}^{\infty}$, *что имеет место равенство* $Z_n = M_n + A_n$ $Q^{(n)}$*-п. н., для любых* $n \in \mathcal{N}$.

Пусть $\mathbf{Q}$ — D1. Для процесса $\mathbf{Z}$ полагаем $\|\mathbf{Z}\|_{var} := E^{Q^{(0)}}(|Z_0|) + \sum_{n=0}^{\infty} E^{Q^{(n+1)}}(|Z_{n+1} - Z_n|)$.

Предложение 4. *Если в условиях теоремы* 1 *величина* $\|\mathbf{Z}\|_{var} < \infty$, *то* $\|\mathbf{M}\|_{var} < \infty$ *и* $\|\mathbf{A}\|_{var} < \infty$.

Пусть $\mathbf{Q}$ — D2. Для процесса $\mathbf{Z}$ полагаем $\|\mathbf{Z}\|_{\mathcal{L}(\Omega, \mathbf{Q})} := \sup_n E^n_{-1}(|Z_n|)$.

Предложение 5. *Если* $\mathbf{Q}$ *в условиях теоремы* 1 *есть* WD *и* $\|Z\|_{\mathcal{L}_1(\Omega, \mathbf{Q})} < \infty$, *то* $\|\mathbf{M}\|_{\mathcal{L}_1(\Omega, \mathbf{Q})} < \infty$ *и* $\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{L}_1(\Omega, \mathbf{Q})} < \infty$.

Легко видеть, что если $\mathbf{Z}$ является разностью двух неотрицательных DM2, то для него $\|\mathbf{Z}\|_{\mathcal{L}_1(\Omega, \mathbf{Q})} < \infty$.

Теорема 2 (разложение Крикеберга для деформированных мартингалов). *Пусть* $\mathbf{Z}$ *есть* DM2. *Этот процесс принадлежит* $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathbf{Q})$ *тогда и только тогда, когда существуют единственные неотрицательные* DM2 $\mathbf{Z}^{(1)} =$

$(Z_n^{(1)}, \mathcal{F}_n, Q^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ *и* $\mathbf{Z}^{(2)} = (Z_n^{(2)}, \mathcal{F}_n, Q^{(n)})_{n=0}^{\infty}$, *удовлетворяющие двум условиям*:

$$Z_n = Z_n^{(1)} - Z_n^{(2)} \quad Q^{(n)}\text{-п. н. для любых } n \in \mathcal{M},$$

$$\|\mathbf{Q}\|_{\mathcal{L}_1(\Omega,\mathbf{Q})} = \|\mathbf{Z}^{(1)}\|_{\mathcal{L}_1(\Omega,\mathbf{Q})} + \|\mathbf{Z}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_1(\Omega,\mathbf{Q})}.$$

З а м е ч а н и е. Все представленные в данном докладе результаты являются обобщениями соответствующих классических результатов (см., например, [1]), если в качестве деформации $\mathbf{Q}$ выбрать вероятностную меру P на $\mathcal{F}_\infty = \vee_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}_n$, т. е. положить $Q^{(n)} = P|_{\mathcal{F}_n}$.

В докладе будут также представлены различные естественные примеры деформированных мартингалов 1-го и 2-го рода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Long R.* Martingale Spaces and Inequalities. Peking: Peking University Press, 1993.