И. В. Павлов, О. В. Назарько (Ростов-на-Дону, РГСУ). **Теорема Дуба о преобразовании свободного выбора для деформированных мартингалов.**

В работе, представленной данным сообщением, мы используем обозначения и аббревиатуры работы [1]. Все моменты остановки (МО), встречающиеся в тексте данного доклада, считаются конечными и определенными относительно фильтрации $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$.

Определение 1. Пусть τ — МО. Для всякого $A \in \mathcal{F}_\tau$ определим функцию $Q^{(\tau)}(A) = \sum_{i=0}^{\infty} Q^{(i)}(A\{\tau = i\})$. Ясно, что $Q^{(\tau)}$ — неотрицательная σ-конечная мера на $\mathcal{F}_\tau$. Если МО τ ограничен, то и мера $Q^{(\tau)}$ ограничена.

Предложение. *Пусть* τ *и* ν — МО, *причем* $0 \leqslant \nu - \tau \leqslant N < \infty$. *Если* $\mathbf{Q}$ *есть* D1 (*соответственно*, D2), *то* $Q^{(\nu)}|_{\mathcal{F}_\tau} \ll Q^{(\tau)}$ (*соответственно*, $Q^{(\nu)}|_{\mathcal{F}_\tau} \gg Q^{(\tau)}$).

Ясно, что если МО ν ограничен, то условия предложения 1 выполнены. Легко видеть, что если с. в. f измерима относительно $\mathcal{F}_\tau$ и $f \geqslant 0$ $Q^{(\tau)}$-п. в., то $E^{Q^{(\tau)}}[f] = \sum_{i=0}^{\infty} E^{Q^{(i)}}[f\, I_{\{\tau=i\}}]$. Эта формула легко переносится на с. в. $f \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_\tau, Q^{(\tau)})$. Для таких же с. в. f и для МО τ, ν $(0 \leqslant \nu - \tau \leqslant 1)$ $Q^{(\nu)}$-п. в. справедливо равенство:

$$E_\tau^\nu f := E^{Q^{(\nu)}}[f|\mathcal{F}_\tau] = \sum_{k=0}^{\infty} f\, I_{\{\tau=k\}\{\nu=k\}} + \sum_{k=0}^{\infty} E^{(k+1)}(f\, I_{\{\tau=k\}\{\nu=k+1\}}|\mathcal{F}_k).$$

Определение 2. Пусть $\mathbf{Q}$ есть D2 с равномерно ограниченными плотностями (UBD2) и $\tau \leqslant \nu$ — такие два МО, что $0 \leqslant \nu - \tau \leqslant N < \infty$. Пусть $\{\tau_k\}_{k=0}^{K}$ — последовательность МО, удовлетворяющая условиям

$$\tau = \tau_0 \leqslant \tau_1 \leqslant \cdots \leqslant \tau_K = \nu; \quad 0 \leqslant \tau_{k+1} - \tau_k \leqslant 1, \qquad k = 0, 1, \ldots, K-1.$$

Для $f \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_\nu, Q^{(\nu)})$ определим оператор $E_\tau^\nu f = E_{\tau_0}^{\tau_1} E_{\tau_1}^{\tau_2} \cdots E_{\tau_{K-1}}^{\tau_K} f$.

Теорема 1. *Если* $\mathbf{Q}$ *есть* UDB1 *и* $f \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_\nu, Q^{(\nu)})$, *то справедлива формула*

$$E_{\tau_0}^{\tau_1} E_{\tau_1}^{\tau_2} \cdots E_{\tau_{K-1}}^{\tau_K} f = \sum_{i=0}^{K} \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{n+1}(f\, I_{\{\tau=n\}\{\nu=n+i\}}).$$

Из теоремы 1 легко вытекает корректность определения 2.

Теорема 2 (обобщение теоремы Дуба на деформированные субмартингалы). *Пусть* $\mathbf{Q}$ *есть* UBD2, *процесс* $\mathbf{Z} = (Z_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{Q}^{(n)})$ *есть* DSubM, $0 \leqslant \nu - \tau \leqslant N < \infty$ *и* $Z_\nu \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_\nu, Q^{(\nu)})$. *Справедливо неравенство* $E_\tau^{(\nu)} Z_\nu \geqslant Z_\tau$ $Q^{(\tau)}$*-п. в.*

Можно показать, что если в теореме 2 МО ν ограничен, то эта теорема верна, когда $\mathbf{Q}$ есть BD2 (включение $Z_\nu \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_\nu, Q^{(\nu)})$ выполняется в данном случае автоматически).

Замечание. Если деформация $\mathbf{Q}$ есть вероятностная мера P на $\vee_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n$, т. е. $Q^{(n)} = P|_{\mathcal{F}_n}$, то данная теорема превращается в классическую теорему Дуба о преобразовании свободного выбора для мартингалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Назарько О. В.* О некоторых фактах теории деформированных мартингалов. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2010, т. 17, в. 2.