С. Г. Халиуллин (Казань, КГУ). **Один критерий стационарности для условно-гауссовских моделей.**

Рассмотрим фильтрованное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}, \mathbf{P})$, на котором задана последовательность случайных величин $h = (h_n)_{n=1}^N$.

Всюду далее будем предполагать, что условные распределения вероятностей $\mathbf{P}\,(h_n \,|\, \mathcal{F}_{n-1})$ являются гауссовскими: $\mathbf{P}\,(h_n \,|\, \mathcal{F}_{n-1}) = \mathcal{N}\,(\mu_n, \sigma_n^2)$, где $\mu_n = \mu_n(\omega)$ и $\sigma_n^2 = \sigma_n^2(\omega)$ являются $\mathcal{F}_{n-1}$-измеримыми. Будем также предполагать, что для всех n и $\omega \in \Omega$ величины $\sigma_n(\omega) \neq 0$.

При этом можно считать, что рассматриваемые условно-гауссовские (относительно потока $\mathcal{F}_n$ и вероятности $\mathbf{P}$) последовательности $h = (h_n)_{n=1}^N$ имеют нулевое среднее и представимы в виде $h_n = \sigma_n \varepsilon_n$, где $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ — последовательность независимых $\mathcal{F}_n$-измеримых случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0,1)$.

Понятно, что более детальные вероятностные свойства последовательности $h = (h_n)_{n=1}^N$ зависят от конкретизации структуры величин $\sigma_n^2 = \sigma_n^2(\omega)$. Но нас будет интересовать только тот факт, что последовательность $h = (h_n)_{n=1}^N$ имеет однородные, либо неоднородные дисперсии (волатильности) σ_n^2.

Определим, следуя [1], последовательность моментов

$$\tau^*(\theta) = \min \left\{ m \geqslant 1 : \sum_{k=1}^{m} \sigma_k^2 \geqslant \theta \right\}, \tag{1}$$

где θ принимает значения $1, 2, \ldots$ и будет рассматриваться как операционное («новое») время.

Пусть также для $\theta = 1, 2, \ldots$: $h_\theta^* = \sum_{\tau^*(\theta-1) < k \leqslant \tau^*(\theta)} h_k$, при этом $\tau^*(0) = 0$. Хорошо известно (см. [1]), что тогда последовательность (h_θ^*) имеет (почти) однородные дисперсии. Используя моменты остановки $\tau^*(\theta)$, построим критерий для проверки «гипотезы однородности дисперсий» для последовательности $h = (h_n)_{n=1}^N$. В предположении однородности дисперсий $\sigma_n^2 \equiv \sigma^2$ рассмотрим величину

$$\chi^2 = \sum_{\theta=1}^{r} \frac{\sigma^2}{\theta} \left(\tau^*(\theta) - \frac{\theta}{\sigma^2} \right)^2.$$

Здесь $r = r(N)$ — последний момент остановки.

Теорема. *В предположении однородности последовательности* (σ_n^2) *величина* χ^2 *имеет распределение хи-квадрат с* $(r-1)$ *степенями свободы.*

В конкретной статистической практике в выражении (1) в качестве оценки волатильностей σ_k^2 возьмем несмещенную оценку $\widehat{\sigma}_k^2 = h_k^2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Факты. Модели. М.: Фазис, 1998.