Ф. И. Ц и т о в и ч (Москва, ИППИ РАН). **Субоптимальная последовательная проверка непараметрических гипотез о распределениях с экспоненциально убывающими хвостами.**

В работе, представленной данным сообщением, рассматривается задача построения субоптимальной последовательной процедуры проверки гипотез, когда множество возможных распределений является непараметрическим. Предполагается, что хвосты распределений на бесконечности имеют экспоненциальную скорость убывания, однако значение скорости точно не известно. Допустимыми считаются процедуры, обеспечивающие заданную верхнюю границу для максимальной вероятности ошибки. Функцией риска процедуры является максимальное среднее значение продолжительности наблюдений для всех распределений из правильной гипотезы.

Гипотезы имеют вид

$$\mathcal{H}_1: \quad f \in \mathcal{G}_1, \qquad \mathcal{H}_2: \quad f \in \mathcal{G}_2, \tag{1}$$

где $f(x)$ — плотность меры $\mathbf{P}$ относительно некоторой общей для всех возможных распределений меры μ, окрестности $\mathcal{G}_i$ состоят из плотностей $g_{i,h_i}(x)$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$g_i(x)(1-\varepsilon) \leqslant g_{i,h_i}(x) \leqslant g_i(x)(1+\varepsilon), \qquad a_i^- \leqslant x \leqslant a_i^+, \tag{2}$$

$$g_i(a_i^-)(1-\varepsilon)\exp\{k_{li}^+(x-a_i^-)\} \leqslant g_{i,h}(x) \leqslant g_i(a_i^-)(1+\varepsilon)\exp\{k_{li}^-(x-a_i^-)\}, \quad x<a_i^-, \tag{3}$$

$$g_i(a_i^+)(1-\varepsilon)\exp\{-k_{ri}^+(x-a_i^+)\} \leqslant g_{i,h}(x) \leqslant g_i(a_i^+)(1+\varepsilon)\exp\{-k_{ri}^-(x-a_i^+)\}, \quad x>a_i^+, \tag{4}$$

где $g_i(x)$ — плотности, задающие соответствующие простые гипотезы $\mathcal{H}_1^0$: $f=g_1$, $\mathcal{H}_2^0$: $f=g_2$.

Условие (2) соответствует аналогичному условию в [1], но на ограниченном подмножестве множества возможных значений наблюдений $\mathbf{X}$, а (3) и (4) задают скорости убывания хвостов распределений на $-\infty$ и $+\infty$ соответственно. Интервалы $A_i := [a_i^-, a_i^+]$ задают области, в которых сосредоточена бóльшая часть значений наблюдений:

$$\sup_{f\in\mathcal{G}_i} \mathbf{P}_f\{x<a_i^-\} \leqslant p_i^-, \qquad \sup_{f\in\mathcal{G}_i} \mathbf{P}_f\{x>a_i^+\} \leqslant p_i^+, \tag{5}$$

где p_i^- и p_i^+ — некоторые малые числа.

Назовем допустимую процедуру $d^* \in \mathcal{D}(\alpha)$ решения задачи проверки гипотез (1) *субоптимальной*, если

$$\lim_{\varepsilon\to 0,\, p_i^-\to 0,\, p_i^+\to 0} J_{\mathcal{H}_i}(d^*) = \lim_{\varepsilon\to 0,\, p_i^-\to 0,\, p_i^+\to 0} \inf_{d\in\mathcal{D}(\alpha)} J_{\mathcal{H}_i}(d),$$

где $J_{\mathcal{H}_i}(d) = \lim_{\alpha\to 0}[R_{\mathcal{H}_i}(d)/|\ln\alpha|]$ есть главный член функции риска при $\alpha\to 0$. Смысл определения состоит в том, что при сжимании окрестностей заданных распределений g_1 и g_2 до нуля получаем асимптотически оптимальную процедуру при $\alpha\to 0$. В наших обозначениях сжимание окрестностей означает, что $\varepsilon\to 0$ и вероятности p_i^+, p_i^-, определяемые формулами (5), также стремятся к нулю.

Будет предложена процедура d_0, для которой получена неасимптотическая верхняя граница, обеспечивающая субоптимальность этой процедуры.

Принципиальным отличием полученных результатов от результатов [1] является то, что получающаяся граница для функции риска субоптимальной процедуры в пределе отличается от соответствующей границы для простых гипотез. Это объясняется тем, что нижняя оценка скорости убывания хвоста распределения может существенно отличаться от ее истинного значения, что будет приводить к потерям скорости роста отношения правдоподобия для тех наблюдениях, которые попадают в интервал A_1, но не попадают в A_2 при справедливости гипотезы $\mathcal{H}_1$. Поэтому может оказаться, что переход к более простой модели распределений может быть оправдан.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Цитович Ф.И.* Некоторые субоптимальные последовательные правила проверки гипотез. — В сб. трудов 30-й конференции молодых ученых и специалистов ИППИ РАН: Информационные технологии и системы ИТиС'07. М.: ИППИ, 2007, с. 110–115.