А. С. Иванов, **Л. И. Миронова** (Подольск, РОНЦ МГОУ). **Математическое обоснование эксперимента для определения функции напряжений в плоской задаче термоупругости.**

Прочностная надежность технических систем зависит от уровня и характера распределения внутренних напряжений. Среди последних определяющая роль принадлежит температурным напряжениям. Их появление обусловлено неоднородной температурной деформацией в объеме материала. Решение бигармонического уравнения для определения функции напряжений в общем случае представляет значительные математические трудности. Поэтому используют математические аналогии в механике деформируемого твердого тела, когда различные задачи описываются одинаковыми функциональными зависимостями с точностью до постоянных [1]. При этом одна из задач допускает простую экспериментальную реализацию. Целью данного сообщения является математическое обоснование эксперимента для определения функции напряжений и соответствующих компонент тензора термонапряжений. Не нарушая общности, рассмотрим задачу определения температурных напряжений в тепловыделяющем элементе эллиптического поперечного сечения (состояние плоской деформации). Выбор такой системы обусловлен тем, что за счет изменения полуосей эллипса удается получить весьма широкий спектр сечений. Соответствующая задача определения термонапряженного состояния математически формулируется следующим образом:

$$\begin{gathered}\Delta\Delta F = \frac{\alpha E q_\nu(x,y)}{(1-\nu)\lambda}, \quad F = \frac{\partial F}{\partial n} = 0 \quad \text{при} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ \sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy},\end{gathered} \tag{1}$$

где F — функция напряжений, α — коэффициент линейного расширения, E — модуль Юнга, $q_\nu(x,y)$ — мощность объемного тепловыделения, a и b — полуоси эллипса, ν — коэффициент Пуассона, λ — коэффициент теплопроводимости, σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy}, σ_{zz} — компоненты тензора термонапряжений. Формула для σ_{zz} справедлива для свободных торцевых поверхностей эллиптического цилиндра. Условия на границе эллиптического сечения односвязной области соответствуют свободным от нагрузок боковым поверхностям. Задача (1) при постоянном значении q_ν имеет точное аналитическое решение [2].

Математическая формулировка задачи (1) с точностью до обозначений совпадает с задачей изгиба жестко защемленной по внешнему контуру пластины идентичной конфигурации

$$\Delta\Delta\omega = \frac{P(x,y)}{D}, \quad \omega = \frac{\partial \omega}{\partial n} = 0 \quad \text{при} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2}$$

где ω — функция прогиба пластины, D — жесткость пластины, $P(x,y)$ — закон нагружения пластины. Задачи (1) и (2) математически идентичны при условии $[F] = [\chi\omega]$, где χ — коэффициент для сохранения размерности. Закон нагружения пластины определяется из равенства правых частей бигармонических уравнений (1) и (2):

$$P(x,y) = \frac{\alpha E D q_\nu(x,y)}{(1-\nu)\lambda\chi}. \tag{3}$$

Все обозначения соответствуют принятым ранее. Из решения задачи (2) получают компоненты тензора термонапряжений задачи (1):

$$\sigma_{xx} = \chi\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \quad \sigma_{yy} = \chi\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}, \quad \sigma_{xy} = -\chi\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}. \tag{4}$$

Если задачи (1) и (2) не имеют аналитического решения, то для известного закона нагружения модельной пластины экспериментально определяют функцию прогиба. Полученные значения прогиба пластины аппроксимируют соответствующими функциональными зависимостями (например, в виде полиномов) и далее определяют компоненты тензора термонапряжений согласно соотношениям (4). Силовое нагружение пластины осуществляют по закону (3). Достоинством предложенного подхода является то, что экспериментальное определение функции прогиба осуществляется на модельных пластинах при комнатной температуре.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванов А. С.* Математические аналогии в термомеханике. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 5, с. 848–849.
2. *Власов Н. М.*, *Федик И. И.* Тепловыделяющие элементы ядерных ракетных двигателей. М.: ЦНИИатоминформ, 2001, 205 с.