**Н. С. Дёмин, У. В. Андреева** (Томск, ТГУ). **Экзотические опционы продажи с гарантированным доходом владельца опциона на диффузионном $(B, S)$-финансовом рынке.**

Рассмотрение задачи проводится на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, F = (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathcal{P})$ [1]. На финансовом рынке обращаются рисковые (акции) и безрисковые (банковский счет, государственные облигации) активы, текущие цены которых $S_t$ и $B_t$ в течение интервала времени $t \in [0, T]$ определяются уравнениями $dS_t = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dW_t)$, $dB_t = rB_t\, dt$, где $W_t$ — стандартный винеровский процесс, $\sigma > 0$, $r > 0$, $S_0 > 0$, $B_0 > 0$, решения которых имеют вид $S_t = S_0 \exp\{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t\}$, $B_t = B_0 \exp\{rt\}$. Считаем, что текущее значение капитала инвестора $X_t$ определяется в виде $X_t = \beta_t B_t + \gamma_t S_t$, где $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$ — пара $\mathcal{F}_t$-измеримых процессов, составляющая портфель ценных бумаг инвестора. За обладание акцией происходят выплаты дивидендов в соответствии с процессом $D_t$ со скоростью $\delta\gamma_t S_t$, пропорциональной рисковой части капитала с таким коэффициентом $\delta$, что $0 \leqslant \delta < r$. Цель управления портфелем — достижение равенства $X_T = f_T(S)$, где $f_T$ — платежная функция.

Рассматриваются опционы продажи Европейского типа с платежными функциями вида [2]

$$f_{\max 1} = \max\{K_1 - S_T, K_2\}, \quad f_{\max 2} = \max\{K_1 - S_T, K_2\} I\{S_T < K_1\}, \tag{1}$$

где $I\{A\}$ — индикатор события $A$.

Пусть

$$z_0(t) = \frac{\ln(K_1/S_t) - (r - \delta - \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}},$$

$$z_1(t) = \frac{\ln((K_1 - K_2)/S_t) - (r - \delta - \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}},$$

$$z_2(t) = \frac{\ln(K_1/S_t) - (r - \delta + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}},$$

$$z_3(t) = \frac{\ln((K_1 - K_2)/S_t) - (r - \delta + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}},$$

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} \exp\{-x^2/2\}\, dx.$$

**Теорема.** *В случае опционов продажи с платежными функциями* (1) *стоимости опционов, портфели* (*хеджирующие стратегии*) *и соответствующие им капиталы определяются соответственно формулами*

$$P_{\max 1} = K_1 e^{-rT}\Phi(z_1) + K_2 e^{-rT}\Phi(-z_1) - S_0 e^{-\delta T}\Phi(z_3),$$

$$P_{\max 2} = K_1 e^{-rT}\Phi(z_1) + K_2 e^{-rT}[\Phi(z_0) - \Phi(z_1)] - S_0 e^{-\delta T}\Phi(z_3),$$

$$\gamma_t^{\max 1} = -e^{-\delta(T-t)}\Phi(z_3(t)),$$

$$\gamma_t^{\max 2} = -e^{-\delta(T-t)}\Phi(z_3(t)) - \frac{K_2 e^{-r(T-t)}}{S_t \sigma\sqrt{(T-t)}}\Phi(z_0(t)),$$

$$\beta_t^{\max 1} = \frac{e^{-r(T-t)}}{B_t}[K_1\Phi(z_1(t)) + K_2\Phi(-z_1(t))],$$

$$\beta_t^{\max 2} = \frac{e^{-r(T-t)}}{B_t}\left\{K_1\Phi(z_1(t)) + K_2[\Phi(z_0(t)) - \Phi(z_1(t))] + \frac{K_2\Phi(z_0(t))}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right\},$$

$$X_t^{\max 1} = K_1 e^{-r(T-t)}\Phi(z_1(t)) + K_2 e^{-r(T-t)}\Phi(-z_1(t)) - S_t e^{-\delta(T-t)}\Phi(z_3(t)),$$

$$X_t^{\max 2} = K_1 e^{-r(T-t)} \Phi(z_1(t)) + K_2 e^{-r(T-t)} [\Phi(z_0(t)) - \Phi(z_1(t))] - S_t e^{-\delta(T-t)} \Phi(z_3(t)).$$

Исследованы свойства решения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. М.: Фазис, 1998.
2. *Кожин К.* Все об экзотических опционах. — Рынок ценных бумаг, 2002, I, № 15, с. 53–57; II, № 16, с. 61–64; III, № 17, с. 68–73.