С. Г. Буланов (Таганрог, ТГПИ). **Элементы компьютерного анализа устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений с нелинейной добавкой.**

Анализ устойчивости по Ляпунову решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), моделирующих системы управления, целесообразно выполнять в режиме реального времени. Для этой цели требуется разрабатывать специальные компьютерные методы. Попытка такой разработки представлена ниже для систем линейных ОДУ с нелинейной добавкой. Рассматривается задача Коши для системы

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y + F(t,Y), \quad Y(t_0) = Y_0. \tag{1}$$

Предполагается, что для (1) выполнены все условия существования и единственности решения в области $\mathcal{R} = \{t_0 \leqslant t < \infty;\ \widetilde{Y}(t), Y(t)\colon\ \|\widetilde{Y}_0 - Y_0\| \leqslant \delta,\ \delta > 0\}$, все коэффициенты матрицы $A(t)$ и элементы вектор-функции $F(t,Y)$ определены, непрерывны и непрерывно дифференцируемы на отрезке $[t_0, t]$ при любых $t \in [t_0, \infty)$; устойчива соответствующая (1) линейная система.

Разностное решение системы (1) по методу Эйлера имеет вид $Y_{i+1} = (E + hA(t_i))Y_i + hF(t_i, Y_i)$, где h — шаг равномерной сетки, узлы которой при любом выборе $t = \mathrm{const}$, $t \in [t_0, \infty)$, всегда предполагаются связанными соотношениями $t = t_{i+1}$, $h = (t_{i+1} - t_0)/(i+1)$, $i = 0, 1, \ldots$ Величина возмущения в разностном приближении определяется рекуррентно: $\widetilde{Y}_{i+1} - Y_{i+1} = (E + hA(t_i))(\widetilde{Y}_i - Y_i) + h\,(F(t_i, \widetilde{Y}_i) - F(t_i, Y_i))$, и, значит, $\widetilde{Y}_{i+1} - Y_{i+1} = \prod_{l=0}^{i}(E + hA(t_{i-l}))(\widetilde{Y}_0 - Y_0) + D_{Ei} + S_{Ei}$, где $D_{Ei} = \sum_{r=1}^{i}\prod_{l=0}^{i-r}(E + hA(t_{i-l}))h(F(t_{r-1}, \widetilde{Y}_{r-1}) - F(t_{r-1}, Y_{r-1})) + h(F(t_i, \widetilde{Y}_i) - F(t_i, Y_i))$, $S_{Ei} = \sum_{r=1}^{i}\prod_{l=0}^{i-r}(E + hA(t_{i-l}))\overline{\Theta}_{E,r-1} + \overline{\Theta}_{E,i}$, $\overline{\Theta}_{E,i}$ — погрешность метода Эйлера на шаге i. В рассматриваемых условиях $\lim_{h\to 0} S_{Ei} = \vec{0}$ [1], и величина возмущения определяется равенством $\widetilde{Y}(t) - Y(t) = \lim_{i\to\infty}\prod_{l=0}^{i}(E + hA(t_{i-l}))(\widetilde{Y}_0 - Y_0) + \lim_{i\to\infty} D_{Ei}$. На данной основе доказывается следующее утверждение.

Теорема. *В рассматриваемых условиях для устойчивости решения задачи* (1) *необходимо и достаточно, чтобы для произвольного* $\widetilde{\varepsilon} > 0$ *нашлось такое* $\delta > 0$, *что* $\|\widetilde{Y}_0 - Y_0\| \leqslant \delta$ *влечет за собой*: *для любого* $t \in [t_0, \infty)$

$$\Bigl\|\lim_{i\to\infty} D_{Ei}\Bigr\| = \Bigl\|\widetilde{Y}(t) - Y(t) - \lim_{i\to\infty}\prod_{l=0}^{i}(E + hA(t_{i-l}))(\widetilde{Y}_0 - Y_0)\Bigr\| \leqslant \widetilde{\varepsilon}. \tag{2}$$

Условие (2) ориентировано на программную реализацию. Выражение под знаком нормы программируется, путем проверки неравенства (2) можно выполнять анализ устойчивости на компьютере.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ромм Я. Е., Буланов С. Г.* Метод компьютерного анализа устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений. Таганрог: ТГПИ, 2009, 119 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ 30.04.09, № 268–B2009.