И. А. Гуримская (Нерюнгри, ЮЯИЖТ). **Об эффективном решении первой краевой задачи в полуплоскости с функциональной проницаемостью.**

Рассмотрим в двухслойной полуплоскости $D(y < l) = D_1(y < 0) \cup D_2(0 < y < l)$, $x \in \mathbf{R}$, задачу для потенциалов φ_i в D_i вида

$$\Delta\varphi_1 = 0, \quad p(y)\partial_x^2\varphi_2 + \partial_y[p(y)\partial_y\varphi_2] = 0, \quad \varphi_{2|y=l} = h(x), \tag{1}$$

$$y = 0: \quad \varphi_1 = \varphi_2, \quad \partial_y\varphi_1 = \partial_y\varphi_2, \tag{2}$$

где $p(y) = k(by+1)^2$, $k, b > 0$ — постоянные, $\partial_x^n = \partial^n/\partial x^n$. Данная задача описывает установившиеся процессы тепломассопереноса в неоднородной полуплоскости D с непрерывной функцией проницаемости, убывающей с глубиной в полосе D_2 и равной постоянной k в D_1. Представляя решение задачи (1)–(2) в виде $\varphi_1(x,y) = u_1(x,y)$, $\varphi_2(x,y) = u_2(x,y)(by+1)^{-1}$, для функций u_i в D_i получим задачу

$$\Delta u_i = 0, \quad u_{2|y=l} = f(x), \tag{3}$$

$$y = 0: \quad u_1 = u_2, \quad \partial_y u_1 = \partial_y u_2 - bu_2, \tag{4}$$

где $f(x) = (bl+1)h(x)$. Методом работы [1] выразим решение задачи (3)–(4) через известное решение $F(x,y)$ классической задачи Дирихле в однородной полуплоскости D вида $\Delta F = 0$, $F_{|y=l} = f(x)$. Полагая, что функция $F(x,0)$ разлагается в интеграл Фурье с коэффициентами Фурье f_i, представим функцию $F(x,y)$ при $y < 0$ в виде $F(x,y) = \int_0^\infty e^{\lambda y} g(x,\lambda)\,d\lambda$, где $g = f_1\sin\lambda x + f_2\cos\lambda x$. Отсюда следует формула [1]

$$\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-\gamma t}t^n F(x, y-t)\,dt = \int_0^\infty \frac{e^{\lambda y}g}{(\lambda+\gamma)^{n+1}}\,d\lambda. \tag{5}$$

Представляя решение задачи (3) в виде $u_1 = \int_0^\infty a_1 e^{\lambda y} g\,d\lambda$, $u_2 = F(x,y) + \int_0^\infty a_2 g \operatorname{sh}\lambda(y-l)\,d\lambda$, из условий сопряжения (4) находим $a_1 = \lambda e^{\lambda l} d$, $a_2 = bd$, где $d = e^{-\lambda l}[(\lambda+\gamma)(1-q)]^{-1}$, $q = e^{-2\lambda l}\gamma(\lambda+\gamma)^{-1}$, $\gamma = b/2$, причем $|q| < 1$ при $0 < \lambda < \infty$. Полученные функции u_i содержат двукратные квадратуры (внешние и внутренние в коэффициентах Фурье f_j) от сильно осциллирующих тригонометрических функций. Разлагая $(1-q)^{-1}$ в геометрическую прогрессию, с учетом формулы (5) окончательно решение задачи (1)–(2) приведем к виду однократных квадратур без осцилляций:

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^\infty \frac{\gamma^n}{n!}\int_0^\infty e^{-\gamma t}t^n \partial_y F(x, y-2nl-t)\,dt,$$

$$\varphi_2 = \frac{F(x,y)}{by+1} + \sum_{n=0}^\infty \frac{\gamma^{n+1}}{(by+1)n!}\int_0^\infty e^{-\gamma t}t^n[F(x, y-2l(n+1)-t) - F(x, -y-2nl-t)]\,dt.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Холодовский С. Е.* Метод свертывания разложений Фурье. Случай обобщенных условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах. — Дифференц. уравнения, 2009, т. 45, № 6, с. 855–859.