В. В. Л а в р е н т ь е в (Москва, МГУ). **О структуре банаховозначных семимартингалов.**

Пусть $(\mathbf{H}, \mathcal{B}(\mathbf{H}))$ — банахово пространство с σ-алгеброй борелевских множеств (относительно сильной топологии, порожденной нормой $\|\cdot\|$). Обозначим $\mathbf{H}^*$ пространство, сопряженное с $\mathbf{H}$, и $(h, h^*) = h^*(h)$, $h \in \mathbf{H}$, $h^* \in \mathbf{H}^*$.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — полное вероятностное пространство с семейством σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$, удовлетворяющее обычным условиям полноты, неубывания и непрерывности справа. Пусть $X = (X_t, \mathcal{F}_t; \mathbf{H})$ — семимартингал, принимающий значения в банаховом пространстве $\mathbf{H}$, т. е. $X_t = X_0 + M_t + V_t$, где M — локальный мартингал $(\mathcal{M}_{loc}(\mathbf{H}))$, V — процесс локально ограниченной вариации $(\mathcal{V}_{loc}(\mathbf{H}))$. Обозначим $\mu = \mu(dt, dx)$ целочисленную случайную меру скачков семимартингала X: $\mu((0,t], \Gamma) = \sum_{0<s\leqslant t} I\{\Delta X_s \in \Gamma\}$, $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbf{H}\backslash\{0\})$.

Теорема. *Для семимартингалов, принимающих значения в сепарабельном банаховом пространстве со свойством Радона–Никодима (в частности, в рефлексивном пространстве), справедливо следующее разложение:*

$$X_t = X_0 + B_t^a + M_t^a + \int_0^t \int_{\|x\|>a} x\mu(ds, dx)$$

с предсказуемым процессом $B^a = (B_t^a, \mathcal{F}_t; \mathbf{H})$ из класса процессов локально интегрируемой вариации $\mathcal{A}_{loc}(\mathbf{H})$ и локально квадратично интегрируемым мартингалом $M^a \in \mathcal{M}_{loc}^2(\mathbf{H})$. В отличие от определения семимартингала, такое представление единственно.

Положим $X_t^a = X_0 + \sum_{s\leqslant t} \Delta X_s I\{\|\Delta X_s\| > a\}$ для некоторого $a > 0$, тогда $X^a = (X_t^a, \mathcal{F}_t; \mathbf{H}) \in \mathcal{V}_{loc}(\mathbf{H})$, процесс $X - X^a$ также является семимартингалом и имеет ограниченные скачки. Более того, справедливо следующее утверждение, из которого следует существенная часть утверждений теоремы.

Лемма 1. *Пусть сепарабельное банахово пространство $\mathbf{H}$ имеет свойство Радона–Никодима, тогда процесс $X - X^a$ допускает представление $X - X^a = B^a + M^a$ с предсказуемым процессом $B^a = (B_t^a, \mathcal{F}_t; \mathbf{H})$ из класса процессов локально интегрируемой вариации $\mathcal{A}_{loc}(\mathbf{H})$ и локально квадратично интегрируемым мартингалом $M^a \in M_{loc}^2(\mathbf{H})$. При этом $\|\Delta B_b^a\| \leqslant a$, $\|\Delta M_s^a\| \leqslant 2a$, $t \geqslant 0$ ($\mathbf{P}$-п. н.).*

Для доказательства последовательно проверяются следующие утверждения: a) $X - X^a = A^a + M^a$, где $A^a \in \mathcal{A}_{loc}(\mathbf{H})$, $M^a \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbf{H})$; b) $X - X^a = B^a + M^a$, где B^a — предсказуемый процесс из класса $A_{loc}(\mathbf{H})$, $M^a \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbf{H})$; c) $M^a \in \mathcal{M}_{loc}^2(\mathbf{H})$, $\|\Delta B_s^a\| \leqslant a$, $\|\Delta M_s^a\| \leqslant 2a$ ($\mathbf{P}$-п. н.

Для доказательства утверждения b) используется следующая лемма (см. [1]).

Лемма 2. *Если сепарабельное банахово пространство $\mathbf{H}$ имеет свойство Радона–Никодима, в частности, если $\mathbf{H}$ рефлексивно, то для процесса локально интегрируемой вариации A со значениями в $\mathbf{H}$ (т. е. $A \in \mathcal{A}_{loc}(\mathbf{H})$) существует и единственный (с точностью до неразличимости) такой предсказуемый процесс $A' \in \mathcal{A}_{loc}(\mathbf{H})$, называемый* компенсатором, *что $A - A' \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbf{H})$.*

Для завершения доказательства теоремы используются результаты работы [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pellaumail J.* Sur l'integrale stochastique et la decomposition de Doob–Meyer. — Paris: Soc. Math. France, 1973, 125 p. (Asterisque. 9).
2. *Гальчук Л. И.* Обобщение теоремы Гирсанова о замене меры на случай полумартингалов со скачками. — Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. 22, в. 2, с. 279–294.