Ю. В. Мартыненко (Ульяновск, УлГУ). **Функция устойчивости метода вариационных сплайнов.**

Метод вариационных сплайнов (ВС) разработан для решения задачи Коши для дифференциально-алгебраических уравнений [1, 2]:

$$F(\dot{x}, x, t) = 0, \quad x(t_0) = x^0.$$

Важной характеристикой численных методов решения задачи Коши является их устойчивость, т. е. ограниченность погрешности приближенного решения $\{x_k\}$ при $k \to \infty$.

Данный подход может быть применен к изучению устойчивости метода вариационных сплайнов. В работе [2] получена функция устойчивости метода в случае непрерывного сплайна 1-й степени. Доказано, что в этом случае метод вариационных сплайнов является A-устойчивым и не является L-устойчивым.

Рассмотрим возможность исследования устойчивости метода ВС для непрерывного сплайна произвольной степени s. Применяя метод к задаче (1) на равномерной сетке, получаем

$$x(t_{k+1}) = x_{k+1} = v_0^k + (t_{k+1} - t_k)v_1^k + \cdots + (t_{k+1} - t_k)^s v_s^k = v_0^k + hv_1^k + \cdots + h^s v_s^k.$$

Значения $\{v_j^k\}_{j=1,2,\ldots,s}$ могут быть получены решением соответствующей системы линейных уравнений [2] по формулам Крамера: $v_j^k = h^{-j} v_0^k P_j(\lambda h)/Q(\lambda h)$, где $P_j(\lambda h)$ и $Q(\lambda h)$ — полиномы с вещественными коэффициентами степени $2s - j$ и $2s$ соответственно.

Тогда

$$x_{k+1} = v_0^k + h\, h^{-1}\, v_0^k \frac{P_1(\lambda h)}{Q(\lambda h)} + \cdots + h^s\, h^{-s}\, v_0^k \frac{Ps(\lambda h)}{Q(\lambda h)}.$$

В силу непрерывности сплайна, $v_0^k \equiv x_k$, поэтому окончательно получаем

$$x_{k+1} = \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{P_j(\lambda h)}{Q(\lambda h)} + 1 \right) x_k = R(\lambda h) x_k.$$

Таким образом, для непрерывного сплайна произвольной степени s функция устойчивости является рациональной функцией с вещественными коэффициентами над полем комплексных чисел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Горбунов В. К.*, *Мартыненко Ю. В.* Метод вариационных сплайнов для сингулярных дифференциальных уравнений. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2008, т. 15, в. 3, с. 461–462.
2. *Мартыненко Ю. В.* Метод вариационных сплайнов для дифференциальных уравнений в нормальной форме. — Тр. Средневолжского матем. общ-ва. Саранск: СВМО, 2007, т. 9, в. 2, с. 110–120.
3. *Хайрер Э.*, *Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999.