

И. Ю. С е д ы х (Москва, ВГНА Минфина России). **Предельное поведение решения системы нелинейных стохастических уравнений.**

Пусть размерность пространства равна 2 и существует решение системы стохастических дифференциальных уравнений

$$d\zeta(t) = \bar{a}(\zeta(t)) dt + \bar{b}(\zeta(t)) dw(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $\zeta(t) = (\zeta_1(t), \zeta_2(t))$, а коэффициенты $\bar{a}(x) = (\bar{a}_1(x), \bar{a}_2(x))$, $\bar{b}(x) = (\bar{b}_1(x), \bar{b}_2(x))$ — действительные измеримые функции, $x \in \mathbf{R}^2$, $w(t)$ — одномерный винеровский процесс, заданный на вероятностном пространстве (Ω, F, P) .

Пусть $\zeta(0) = x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ — неслучайная точка, коэффициенты $\bar{a}(x)$ и $\bar{b}(x)$ допускают разложения $\bar{a}(x) = Ax + \tilde{a}(x)$, $\bar{b}(x) = Bx + \tilde{b}(x)$, где $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ ($i, j = 1, 2$) — постоянные матрицы, $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbf{R}$.

Возьмем систему линейных стохастических дифференциальных уравнений с постоянными матрицами A и B , соответствующую данной нелинейной системе (1):

$$d\xi(t) = A\xi(t) dt + B\xi(t) dw(t), \quad (2)$$

где $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$. Пусть D — некоторая область в $\mathbf{R}^2$ и τ_D — момент первого выхода процесса $\xi(t)$ из области D .

О п р е д е л е н и е 1. Непустое множество $\Gamma \in D$ называется *инвариантным множеством системы* (2) до момента первого выхода τ_D , если $\mathbf{P}\{\xi(t) \in \Gamma \forall t \leq \tau_D | \xi(0) \in \Gamma\} = 1$.

О п р е д е л е н и е 2. Множество $\{G(x) = C\}$ называется *стационарным для системы уравнений* (1), если оно является инвариантным множеством соответствующей линеаризованной системы (2), и $\tilde{a}(x)|_{G(x)=C} = 0$, $\tilde{b}(x)|_{G(x)=C} = 0$.

Пусть матрицы A и B имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} -\mu^2/2 & m\mu \\ -m\mu & -\mu^2/2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $\mu = \text{const} > 0$, m — произвольная постоянная.

Тогда уравнения инвариантных множеств системы (2) имеют вид $x_1^2 + x_2^2 = C$, где C — произвольная неотрицательная постоянная [1]. Перейдем в полярную систему координат $x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$. Разобьем процесс $\zeta(t)$ на две составляющие: радиальную $r(t)$ и угловую $\varphi(t)$. Обозначим

$$\lambda = (\cos \varphi, \sin \varphi), \quad \bar{\lambda} = (-\sin \varphi, \cos \varphi), \quad x = (x_1, x_2), \quad \bar{x} = (-x_2, x_1), \\ b(r, \varphi) = \tilde{b}(r \cos \varphi, r \sin \varphi), \quad a(r, \varphi) = \tilde{a}(r \cos \varphi, r \sin \varphi), \quad \sigma(r, \varphi) = r^{-1}(b(r, \varphi), \bar{\lambda}).$$

Теорема. Пусть матрицы A и B системы линейных стохастических дифференциальных уравнений (2) имеют вид (3), и множества $\{X: x_1^2 + x_2^2 = C_i, i = 1, 2\}$ являются стационарными для системы (1).

1. Если $b(r, \varphi), \bar{\lambda} = 0$, $(a(r, \varphi), \bar{\lambda}) + \mu(b(r, \varphi), \bar{\lambda}) = 0$, то при $m \neq 0$ с вероятностью единица $\varphi(t)/t \rightarrow -m\mu$ при $t \rightarrow \infty$, при $m = 0$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\varphi(t)}{\sqrt{t}} < y\right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}|\mu|} \int_{-\infty}^y \exp\left\{-\frac{u^2}{2\mu^2}\right\} du.$$

2. Если $m\mu \neq 0$, $0 < -\mu + r^{-1}(b(r, \varphi), \bar{\lambda}) \leq c$, $(a(r, \varphi), \bar{\lambda}) + \mu(b(r, \varphi), \bar{\lambda}) - r^{-1}(b(r, \varphi), \bar{\lambda})(b(r, \varphi), \lambda) = 0$, то $\mathbf{P}\{\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t)/t = -m\mu\} = 1$.

3. Если $m\mu + r^{-1}((a(r, \varphi), \bar{\lambda}) + \mu(b(r, \varphi), \lambda) - r^{-1}(b(r, \varphi), \bar{\lambda})(b(r, \varphi), \lambda)) = \hat{a}(\varphi)$, $0 < -\mu + \sigma(r, \varphi) = \hat{\sigma}(\varphi)$, $|\int_0^u \hat{a}(v) \hat{\sigma}^{-2}(v) dv| < c_1$ и при $|\varphi| \rightarrow \infty$ выполняются неравенства $\varphi^{-1} \int_0^\varphi \exp \{ \pm 2 \int_0^u \hat{a}(v) \hat{\sigma}^{-2}(v) dv \} du \rightarrow k_{1,2}$, где $0 < k_i < \infty$, $i = 1, 2$, то

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{\varphi(t)}{\sqrt{t}} < y \right\} \rightarrow \sqrt{\frac{k_1 k_2}{2\pi}} \int_{-\infty}^y \exp \left\{ -\frac{u^2 k_1 k_2}{2} \right\} du.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабчук В. Г. Инвариантные множества системы линейных стохастических диффузионных уравнений с постоянными коэффициентами. Киев: ИК АН УССР, 1980, 43 с. (препринт).
2. Седых И. Ю. Поведение радиальной компоненты решения системы диффузионных уравнений. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2006, т. 13, в. 3, с. 541–542.