

**А. С. Иванов, В. И. Ковалев, О. И. Челябинна** (Подольск, РОНЦ МГОУ). **Тестовые примеры при моделировании температурных напряжений в элементах конструкций с переменными характеристиками.**

Переменные характеристики элементов конструкций (свойства материала, параметры эксплуатации, геометрическая форма) позволяют управлять уровнем и характером распределения температурных напряжений. Аналитическое решение задач термоупругости для произвольного изменения перечисленных характеристик встречает значительные математические трудности. Поэтому используют математические аналогии в механике сплошной среды, когда задачи с разным физическим содержанием описываются одинаковыми функциональными зависимостями. При этом одна из задач позволяет осуществить достаточно простой эксперимент для своего решения. Корректность проведения эксперимента при анализе термонапряженного состояния изделий обеспечивается тестовыми примерами, которые имеют аналитическое решение. Приведены аналитические зависимости при моделировании температурных напряжений в тепловыделяющем цилиндре с переменной мощностью объемного тепловыделения. Задача термоупругости (состояние плоской деформации) математически формулируется следующим образом [1]:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta F &= \frac{\alpha E q_{\nu}^0}{(1-\nu)\lambda} \left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right), \quad F = \frac{\partial F}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = R, \\ \sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}, \quad \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $F$  — функция напряжений,  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $E$  — модуль Юнга,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности,  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$  и  $\sigma_{zz}$  — компоненты тензора термонапряжений,  $q_{\nu}^0(1+r^2/R^2)$  есть радиальная зависимость мощности объемного тепловыделения,  $R$  — радиус цилиндра. Осевая компонента тензора термонапряжений соответствует свободным от нагрузок торцевым поверхностям. Граничные условия для функции напряжений при  $r = R$  означают жесткое закрепление сечения цилиндра по внешнему контуру. Задача (1) имеет точное аналитическое решение для функции напряжений и соответствующих компонент тензора напряжений

$$\begin{aligned} F &= \frac{\alpha E q_{\nu}^0 R^4}{64(1-\nu)\lambda} \left[ \frac{11}{9} - \frac{7}{3} \frac{r^2}{R^2} + \frac{r^4}{R^4} + \frac{1}{9} \frac{r^6}{R^6} \right], \quad A = \frac{\alpha E q_{\nu}^0 R^2}{96(1-\nu)\lambda}, \\ \sigma_{rr} &= A \left[ \frac{r^4}{R^4} + 6 \frac{r^2}{R^2} - 7 \right], \quad \sigma_{\theta\theta} = A \left[ 5 \frac{r^4}{R^4} + 18 \frac{r^2}{R^2} - 7 \right], \quad \sigma_{zz} = A \left[ 6 \frac{r^4}{R^4} + 24 \frac{r^2}{R^2} - 14 \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Все обозначения соответствуют принятым ранее. Точное аналитическое решение задачи термоупругости для принятого закона объемного тепловыделения может служить тестовым примером при моделировании внутренних напряжений численными или экспериментальными методами. Функции  $F$  термоупругой задачи соответствует функция прогиба  $\omega$  модельной пластины согласно соотношению  $[F] = [\chi\omega]$ , где  $\chi$  — коэффициент для сохранения размерности. Функция прогиба  $\omega$  является решением бигармонического уравнения для жестко заземленной пластины идентичной конфигурации

$$\Delta \Delta \omega = \frac{P(r)}{D}, \quad \omega = \frac{\partial \omega}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = R, \quad (3)$$

где  $D$  — жесткость пластины. Закон нагружения модельной пластины определяют из равенства правых частей бигармонических уравнений (1) и (3):

$$P(r) = \frac{\alpha E q_{\nu}^0}{(1-\nu)\lambda\chi} \left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right). \quad (4)$$

При нагружении жестко заземленной модельной пластины по закону (4) получают значения функции прогиба в отдельных точках модели. Если экспериментально измеренные значения прогиба пластины в пределах приемлемой точности совпадают с аналитической зависимостью, то это свидетельствует о правомочности используемой модельной системы. Точные аналитические зависимости для других переменных характеристик (коэффициент линейного расширения, геометрическая форма) получают аналогичным образом. Основу тестовых примеров составляют математические аналогии в механике деформируемого твердого тела.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванов А. С., Ковалев В. И., Цаповская О. А.* Температурные напряжения в сплошном длинном цилиндре с переменным объемным тепловыделением. — Проблемы машиностроения и автоматизации, 2008, № 1, с. 111–114.