Е. Г. Г о л ь ш т е й н (Москва, ЦЭМИ РАН). **Конечные бескоалиционные игры, обладающие выпуклой структурой.**

Рассматривается конечная бескоалиционная игра с числом игроков k, в которой игрок i имеет n_i стратегий, а его выигрвш задается с помощью k-мерной таблицы $A_i = (a^{(i)}_{s_1\dots s_k})$, где $a^{(i)}_{s_1\dots s_k}$ — выигрыш игрока i, если игрок α выбирает стратегию s_α, $1 \leqslant s_\alpha \leqslant n_\alpha$, $1 \leqslant \alpha \leqslant k$. Расширив множества стратегий игроков путем введения смешанных стратегий, приходим к игре Γ с k участниками, в которой игрок i располагает множеством стратегий $\mathbf{X}_i = \{\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in_i})\colon \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} = 1,\ x_{ij} \geqslant 0,\ 1 \leqslant j \leqslant n_i\}$, а его функцией выигрышей является $f_i(\mathbf{x}) = \sum_{s_1\dots s_k} a^{(i)}_{s_1\dots s_k} x_{1s_1} \cdots x_{ks_k}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbf{X} = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k$, $1 \leqslant i \leqslant k$.

Свяжем с игрой Γ отображение T_Γ точек $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbf{X}$ в точки евклидова пространства $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \times \dots \times \mathbf{E}_k$, где размерность евклидова пространства $\mathbf{E}_i$ равна n_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, положив

$$T_\Gamma(x) = -\biggl(\frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_1}, \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_2}, \dots, \frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_k}\biggr).$$

Условимся говорить, что игра Γ *обладает выпуклой структурой*, если отображение T_Γ монотонно, т. е. для произвольных $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in \mathbf{X}$ имеет место неравенство $\langle T_\Gamma(\mathbf{x}') - T_\Gamma(\mathbf{x}''), \mathbf{x}' - \mathbf{x}''\rangle \geqslant 0$.

Приводимое ниже утверждение определяет свойства таблиц A_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, задающих игру Γ, при которых эта игра обладает выпуклой структурой.

Теорема 1. *Для того чтобы конечная бескоалиционная игра Γ с числом игроков k, задаваемая набором k-мерных таблиц A_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, обладала выпуклой структурой, необходима и достаточна возможность представления таблиц A_i в виде $A_i = \sum_{j=1}^k A_{ij}$, где элементы k-мерной таблицы A_{ij} зависят только от индексов s_i и s_j, если $i \neq j$, и не зависят от индекса s_i, если $i = j$, причем при любых $i \neq j$ все элементы таблицы $A_{ij} + A_{ji}$ равны нулю.*

Из определения таблиц $A_{ij} = (a^{(ij)}_{s_1\dots s_k})$ при $i \neq j$ следует, что $a^{(ij)}_{s_1\dots s_k} = \overline{a}^{(ij)}_{s_i s_j}$, т. е. таблица A_{ij} задается матрицей $\overline{A}_{ij} = (\overline{a}^{(ij)}_{s_i s_j})_{n_i n_j}$, причем $\overline{A}_{ij} = -\overline{A}^*_{ji}$, где * обозначает операцию транспонирования.

Пусть конечная игра Γ, определяемая таблицами A_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, обладает выпуклой структурой, т. е. таблицы A_i допускают представления, отмеченные в теореме 1. Введем кососимметричную матрицу A_Γ порядка $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ вида

$$A_\Gamma = \begin{pmatrix} (0)_{n_1} & \overline{A}^{(12)} & \dots & \overline{A}^{(1k)} \\ -\overline{A}^{(12)*} & (0)_{n_2} & \dots & \overline{A}^{(2k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\overline{A}^{(1k)*} & -\overline{A}^{(2k)*} & \dots & (0)_{n_k} \end{pmatrix},$$

где $(0)_{n_i}$ — нулевая матрица порядка n_i, $1 \leqslant i \leqslant k$.

Теорема 2. *Если X_Γ — множество точек Нэша игры Γ, обладающей выпуклой структурой, то $X_\Gamma \times X_\Gamma$ — множество седловых точек билинейной функции $(\mathbf{x}')^* A_\Gamma \mathbf{x}''$ при $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in \mathbf{X}$.*

Следующее утверждение является частным случаем теорем 1, 2 при $k = 2$.

Теорема 3. *Биматричная игра Γ, определяемая матрицами A_1 и A_2, обладает выпуклой структурой в том и только в том случае, если матрица $A = A_1 + A_2 = (a^1_{s_1} + a^2_{s_2})$ при некоторых $a^1_{s_1}$, $a^2_{s_2}$, $1 \leqslant s_1 \leqslant n_1$, $1 \leqslant s_2 \leqslant n_2$. Множество точек Нэша игры Γ, обладающей выпуклой структурой, совпадает с декартовым произведением множеств оптимальных стратегий игроков матричной игры, задаваемой матрицей $\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{s_1 s_2})_{n_1 n_2}$, где $\widetilde{a}_{s_1 s_2} = a^{(1)}_{s_1 s_2} - a^{(1)}_{s_2}$, $1 \leqslant s_1 \leqslant n_1$, $1 \leqslant s_2 \leqslant n_2$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 09–01–00156.