А. В. Б е р н ш т е й н (Москва, ИСА РАН). **Восстановление по данным инвариантных функций.**

Задача восставновления неизвестной функции по данным как элемент построения по данным метамодели сформулирована в [1]. Пусть M — некоторая исходная модель (метод), позволяющая для заданных входных данных $X \in \mathbf{X} \subset \mathbf{R}^p$ строить функцию отклика $Y = F_M(X) \in \mathbf{R}^q$. Пусть $D_N = \{(X_i, Y_i = F_M(X_i)),\ i = 1, 2, \ldots, N\}$ — результаты экспериментов с моделью M для множества входных данных $\mathbf{X}_N = \{X_i,\ i = 1, 2, \ldots, N\}$, по которым строится аппроксиматор $Y = F_{SM}(X) = F_{SM}(X|D_N)$ для исходной зависимости $F_M(X)$. Если новая модель SM, определяемая построенной зависимостью $F_{SM}(X)$, обладает «обобщающей способностью», т. е. обеспечивает приближенное равенство $F_{SM}(X) \approx F_M(X)$ для всех $X \in \mathbf{X}$ (не только на обучающем множестве $\mathbf{X}_N$), то модель SM может рассматриваться как заменитель исходной модели M и называется *метамоделью* или *суррогатной моделью*[1].

Во многих прикладных проблемах наряду с данными D_N может также иметься априорная информация о модели M (функции F_M), учет которой может повысить качество создаваемой метамодели [2].

Рассмотрим задачу построения метамодели SM для модели M, в которой функция F_M инвариантна относительно конечной группы $G = \{g\}$ преобразований: $F_M(X) = F_M(gX)$, $X \in \mathbf{X}$, $g \in G$. Для этой задачи можно использовать расширенную выборку $D_{N,G} = \{D_N(g),\ g \in G\}$, где $D_N(g) = \{(gX_i,\ Y_i = F(X_i)),\ i = 1, 2, \ldots, N\}$. Аппроксиматор $F_{SM}(X|D_{N,G})$, построенный по расширенной выборке, имеет ошибку

$$\varepsilon(F_{SM}(X|D_{N,G})) = \left((N|G|)^{-1} \sum_i \sum_{g \in G} \|Y_i - F_{SM}(gX_i)\|^2 \right)^{1/2}.$$

Рассмотрим симметризованный аппроксиматор $F_{SM-G}(X) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} F_{SM}(gX)$, имеющий ошибку $\varepsilon(F_{SM-G}(X|D_{N,G}))$.

Теорема. *Имеет место соотношение*

$$\varepsilon^2(F_{SM}|D_{N,G}) = \varepsilon^2(F_{SM-G}|D_{N,G}) + N^{-1} \sum_i V_G(X_i),$$

где $V_G(X) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} (F_{SM}(gX) - F_{SM-G}(X))^2$.

Следовательно, исходный аппроксиматор F_{SM} строго мажорируется его инвариантной версией F_{SM-G}, если только аппроксиматор F_{SM} не инвариантен относительно группы G (по крайней мере, на множестве $\mathbf{X}_N$), в этом случае $F_S(X)$ и $F_{SG}(X)$ совпадают.

Приведем результаты вычислительных экспериментов для некоторой прикладной задачи, связанной с оценкой напряженности электромагнитного поля от нескольких источников излучения, имеющей очевидную инвариантную структуру. По одним и тем же данным были построены исходный (F_{SM}) и инвариантный (F_{SM-G}) аппроксиматоры, для которых были вычислены средние ошибки на 4 выбранных случайно тестовых множествах $\mathbf{X}(k) \subset \mathbf{X}$, $k = 1, 2, 3, 4$, большого объема, точки из которых не использовались при построении аппроксиматоров. Нормированные (по отношению к размахам тестовых выборок) значения ошибок $E(k)$, $k = 1, 2, 3, 4$, приведены в таблице:

k	$E(k)$ для F_{SM}	$E(k)$ для F_{SM-G}	k	$E(k)$ для F_{SM}	$E(k)$ для F_{SM-G}
1	0,0263	0,0099	3	0,0446	0,0209
2	0,0421	0,0171	4	0,0510	0,0294

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бернштейн А. В.*, *Кулешов А. П.* Математические методы построения метамоделей. — Труды Третьей международной конференция «Системный анализ и информационные технологии» (САИТ-2009, 14–18 сентября 2009 г., Звенигород, Россия). 2009, с. 756–768.
2. *Кулешов А. П.*, *Бернштейн А. В.* Когнитивные технологии интеграции данных и знаний в метамоделировании. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 6, с. 1088–1089.