Е. Ф. Т и м о ф е е в а, **Т. И. Д е н и с е н к о** (Ставрополь, СевКавГТУ). **Математическое моделирование движения поверхностных волн для водоема с нелинейной функцией рельефа дна.**

В настоящем докладе рассматривается декартова прямоугольная система координат, начало которой совмещено с урезом воды. Ось OX совмещена с поверхностью невозмущенной жидкости и направлена в сторону моря.

При построении непрерывной математической модели, описывающей движение волны на свободной поверхности жидкости переменной глубины, решается задача Коши для пространственно-одномерного уравнения гиперболического типа

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = g\frac{\partial}{\partial x}\left(h(x)\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right), \tag{1}$$

$$\zeta(x,0) = \varphi_0(x), \quad \zeta'(x,0) = \varphi_1(x), \tag{2}$$

где $\zeta(x,t)$ — отклонение свободной поверхности жидкости от равновесного состояния, x — горизонтальная координата, t — время, g — ускорение силы тяжести, $h(x)$ — глубина жидкости.

С учетом уравнения для глубины жидкости $h(x)$ в развернутой форме $h(x) = h_0x^{1/3}/x_0$, $x < x_0$, где h_0 — максимальная глубина жидкости рассматриваемой области, x_0 — граница области, уравнение (1) преобразуется следующим образом:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} - \frac{x^{1/3}}{x_0}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} - \frac{1}{3x_0x^{2/3}}\frac{\partial\zeta}{\partial x} = 0, \qquad a^2 = gh_0. \tag{3}$$

Решение полученной задачи находится с помощью метода Римана. Для этого вводится замена переменных в уравнении (3):

$$\xi = \frac{a}{\sqrt{x_0}}t + \frac{6}{5}x^{5/6}, \quad \eta = \frac{a}{\sqrt{x_0}}t - \frac{6}{5}x^{5/6},$$

в результате уравнение (3) в канонической форме имеет вид

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{10(\xi-\eta)}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\eta} - \frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right) = 0. \tag{4}$$

Прямая $t = 0$ переходит в наклонную прямую $\eta = -\xi$. Начальные условия в новых переменных запишутся следующим образом:

$$\zeta|_{\eta=-\xi} = \varphi_0\left(\left(\frac{5}{6}\xi\right)^{6/5}\right), \quad \left.\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right|_{\eta=-\xi} = 0.$$

Функция $\zeta = \zeta(\xi,\eta)$ заменяется на $u = \zeta(\xi-\eta)^{1/10}$, тогда уравнение (4) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{9u}{100(\xi-\eta)^2} = 0$$

или

$$Lu = u_{\xi\eta} + au_\xi + bu_\eta + cu = 0, \tag{5}$$

где $a = b = 0$, $c = 9/(100(\xi-\eta)^2)$. Тогда решение уравнения (5) выражается формулой Римана:

$$u(M) = \frac{u(P)v(P) + u(Q)v(Q)}{2} - \frac{1}{2}\int_{PQ}(uv_\xi - vu_\xi - 2bvu)\,d\xi + (uv_\eta - vu_\eta + 2\alpha vu)\,d\eta,$$

где P, Q, M — вершины характеристического треугольника, $u(\xi,\eta)$ — решение уравнения (5), $v(\xi,\eta)$ — функция Римана, решение задачи Гурса.

Принимая во внимание, что $\zeta(x_0,t_0) = u(\xi_0,\eta_0)(12/5)^{-1/10}x^{-1/12}$, условия на характеристиках, а также определенные значения $u(P)$, $u(Q)$, $v(P)$, $v(Q)$ и возвращаясь к старым переменным, решение задачи (1)–(2) получаем в следующей форме:

$$\begin{aligned}\zeta(x,t) = {} & \frac{\alpha_1^{1/10}\varphi_0(\alpha_1^{6/5}) + \alpha_2^{1/10}\varphi_0(\alpha_2^{6/5})}{2x^{1/12}} \\ & + \frac{\sqrt{x_0}}{2ax^{1/12}}(5/6)^{1/10}\int_{\beta_1}^{\beta_2} F\left(\frac{9}{10},\frac{1}{10},1,\theta_1\right)\xi^{1/10}\varphi_1(\theta_2)\,d\xi \\ & + \frac{9at}{400\sqrt{x_0}x^{1/12}}(5/6)^{1/10}\int_{\beta_1}^{\beta_2} F\left(\frac{19}{10},\frac{11}{10},2,\theta_1\right)\xi^{1/10}\varphi_0(\theta_2)\xi^{-1/2}\,d\xi,\end{aligned}$$

где $\alpha_1 = x^{5/6} + 5at/\sqrt{x_0}$, $\alpha_2 = x^{5/6} - 5at/\sqrt{x_0}$, $\beta_1 = (6/5)x^{5/6} - at/\sqrt{x_0}$, $\beta_2 = (6/5)x^{5/6} + at/\sqrt{x_0}$,

$$\theta_1 = \left(\frac{a^2t^2}{x_0} - \left(\frac{6}{5}x^{5/6} - \xi\right)^2\right)\Big/\left(\frac{24}{5}\xi x^{5/6}\right), \quad \theta_2 = \left(\frac{5}{6}\xi\right)^{6/5}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леонтьев И. О.* Прибрежная динамика: волны, течения, потоки наносов. М.: ГЕОС, 2001.
2. *Овсяников Л. В.* Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1973.
3. *Кошляков Н. С.*, *Глинер Э. Б.*, *Смирнов М. М.* Дифференциальные уравнения математической физики. Москва, 1962.
4. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным равнениям. Москва, 1965.