П. А. Вельмисов, Ю. А. Казакова, А. В. Крупенников (Ульяновск, УлГТУ). **О некоторых классах решений уравнений газовой динамики.**

Параметрический метод. Рассматривается система дифференциальных уравнений, в которой искомые функции u_k зависят от координат x, y и времени t:

$$F_k(x, y, t, u_1, \ldots, u_n, u_{1x}, \ldots, u_{nx}, u_{1y}, \ldots, u_{ny}, u_{1t} \ldots, u_{nt}) = 0, \qquad k = 1, \ldots, n. \quad (1)$$

Решение системы представляется в параметрической форме:

$$u_k = U_k(\xi, \eta, t), \qquad k = 1, \ldots, n, \quad x = x(\xi, \eta, t), \quad y = y(\xi, \eta, t).$$

Формулы перехода к новым переменным имеют вид

$$u_{kx} = \frac{U_{k\xi} y_\eta - U_{k\eta} y_\xi}{\Delta}, \quad u_{ky} = \frac{U_{k\eta} x_\xi - U_{k\xi} x_\eta}{\Delta},$$
$$u_{kt} = U_{kt} + U_{k\xi} \frac{y_t x_\eta - y_\eta x_t}{\Delta} + U_{k\eta} \frac{y_\xi x_t - x_\xi y_t}{\Delta},$$

где $\Delta = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$ ($\Delta \neq 0$). Система уравнений (1) преобразуется к виду

$$F_k(x, y, t, x_\xi, x_\eta, x_t, y_\xi, y_\eta, y_t, U_1, \ldots, U_n,$$
$$U_{1\xi}, \ldots, U_{n\xi}, U_{1\eta}, \ldots, U_{n\eta}, U_{1t}, \ldots, U_{nt}) = 0. \quad (2)$$

В системе (2) величины x, y, u_k ($k = 1, \ldots, n$) являются функциями переменных ξ, η, t. Решение системы (2) представляется в виде многочленов по степеням η:

$$U_k = \sum_{i=0}^{\alpha_k} u_{ki}(\xi, t)\eta^i, \quad x = \sum_{k=0}^{\gamma} x_k(\xi, t)\eta^k, \quad y = \sum_{k=0}^{\omega} y_k(\xi, t)\eta^k,$$

где $\alpha_k, \gamma, \omega \in \mathbf{N}$ ($\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел). Для квазилинейных уравнений первого порядка, коэффициенты в которых являются многочленами относительно зависимых u_k и независимых x, y переменных, предложен способ определения параметров $\alpha_k, \gamma, \omega \in \mathbf{N}$, для которых система дифференциальных уравнений для $x_k(\xi, t)$, $y_k(\xi, t)$, $u_{ki}(\xi, t)$ является определенной или недоопределенной.

На основе предлагаемого параметрического метода построены решения, проведена их классификация и указаны приложения для некоторых систем уравнений газовой динамики, в том числе

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vu_y = -p_x/\rho, \\ v_t + uv_x + vv_y = -p_y/\rho, \\ u_x + v_y = 0, \quad \rho = \text{const}, \end{cases} \qquad \begin{cases} u_t + uu_x - v_y = 0, \\ u_y - v_x = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho(u_t + uu_x + vu_y) = -p_x, \quad \rho(v_t + uv_x + vv_y) = -p_y, \\ \rho_t + \rho_x u + \rho_y v + \rho(u_x + v_y) = 0, \\ \rho(p_t + up_x + vp_y) - \gamma p(\rho_t + u\rho_x + v\rho_y) = 0, \quad \gamma = \text{const}. \end{cases}$$

Здесь $u(t, x, y)$, $v(t, x, y)$ — проекции вектора скорости, $p(t, x, y)$ — давление, $\rho(t, x, y)$ — плотность.

В частности, получены решения простых и двойных волн. Построены также решения, описывающие течения газа с местными сверхзвуковыми зонами и с ударными волнами в соплах Лаваля.

При решении задач используется граничное условие (непротекания) на линии $g(x,y,t)=0$: $ug_x+vg_y=-g_t$. В стационарном случае решение систем отыскивается в виде

$$u=\sum_{i=0}^{\alpha}u_i(\xi)\eta^i,\quad v=\sum_{i=0}^{\beta}v_i(\xi)\eta^i,\quad x=\sum_{k=0}^{\gamma}x_k(\xi)\eta^k,\quad y=\sum_{k=0}^{\omega}y_k(\xi)\eta^k.$$

Аналогично задаются p, ρ. Параметрические уравнения обтекаемой линии $x=x_*(\xi)$, $y=y_*(\xi)$ определяются после решения обыкновенного дифференциального уравнения $uy_\xi-vx_\xi+(uy_\eta-vx_\eta)d\eta_*/d\xi=0$ при $\eta=\eta_*(\xi)$. Решение задачи, в том числе уравнение обтекаемой линии, определяется в результате решения задачи Коши для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $u_k(\xi)$, $v_k(\xi)$, $x_k(\xi)$, $y_k(\xi)$, $\eta_*(\xi)$.

Методы разделения переменных и Галеркина. Безвихревые изэнтропические течения идеального газа описываются уравнением

$$\begin{aligned}\varphi_{tt}+2\varphi_r\varphi_{rt}+\frac{2}{r^2}\varphi_\theta\varphi_{\theta t}+\varphi_r^2\varphi_{rr}+\frac{1}{r^4}\varphi_\theta^2\varphi_{\theta\theta}&\\+\frac{2}{r^2}\varphi_r\varphi_\theta\varphi_{r\theta}-\frac{1}{r^3}\varphi_r\varphi_\theta^2=a^2\left(\varphi_{rr}+\frac{1}{r}\varphi_r+\frac{1}{r^2}\varphi_{\theta\theta}\right)&,\end{aligned}\tag{3}$$

$$a^2=\rho^{\gamma-1}=P^{(\gamma-1)/\gamma}=\frac{\gamma+1}{2}-(\gamma-1)\left(\varphi_t+\frac{1}{2}\varphi_r^2+\frac{1}{2r^2}\varphi_\theta^2\right).$$

Здесь $\varphi(r,\theta,t)$, a, P, ρ — соответственно безразмерные потенциал скорости, скорость звука, давление, плотность, r, θ — полярные координаты, t — время, $\gamma=\mathrm{const}$ — показатель адиабаты.

Уравнение (3) имеет решение вида $\varphi=(\gamma+1)t/[2(\gamma-1)]+r^2f(\theta,t)$. Функция $f(\theta,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}f_{tt}+8ff_t+2f_\theta f_{\theta t}+8f^3+f_\theta^2f_{\theta\theta}+6ff_\theta^2&\\+(\gamma-1)\left(f_t+2f^2+\frac{1}{2}f_\theta^2\right)(f_{\theta\theta}+4f)=0&.\end{aligned}\tag{4}$$

Для уравнения (4) построены некоторые точные и приближенные решения, в том числе автомодельные. Уравнение (4) используется для описания течений газа между вращающимися по законам $\theta=\theta_1(t)$, $\theta=\theta_2(t)$ плоскостями, в том числе для описания течений с ударными волнами, уравнения которых $\theta=\theta_*(t)$. Для точек плоскостей ($\theta=\theta_k(t)$) имеют место условия непротекания

$$f_\theta[\theta_k(t),t]=\theta_k'(t),\qquad k=1,2.\tag{5}$$

Предложен способ решения краевой задачи (4)–(5), основанный на методе Галеркина и приводящий решение задачи к исследованию системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009–2013 г.г.), ГК № П1122.