И. Г. Эрлих (Москва, МГУ). **Тесты минимального расстояния для проверки линейных гипотез в ARMA модели.**

Рассматривается выборка $u_0, u_1, \ldots, u_n$ из стационарного решения уравнения ARMA(1,1):

$$u_t = au_{t-1} + \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1}, \qquad t \in \mathbf{Z}, \quad |a| < 1, \quad |b| < 1, \quad \mathbf{c} := (a, b)^T,$$

где $\{\varepsilon_t\}_{t\in\mathbf{Z}}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины (инновации) с дифференцируемой плотностью распределения $f(x)$, $\sup|f'| < \infty$, $\mathbf{E}\,\varepsilon_1 = 0$, $\mathbf{E}\,\varepsilon_1^6 < \infty$.

Решается задача проверки гипотезы $H_0 = \{\mathbf{c} = \mathbf{c}_0\}$. Для подсчета *асимптотической относительной эффективности* (АОЭ) построенных тестов в качестве альтернативы рассматривается $H_{1n}(\mathbf{d})$: $\mathbf{c} = \mathbf{c}_0 + n^{-1/2}\mathbf{d} + o\,(n^{-1/2})$, $\mathbf{d}$ — фиксированный двумерный вектор.

Тестовая статистика основана на двухшаговой оценке минимального расстояния $\widehat{\mathbf{c}}_{n,\mathrm{MD}}$ для неизвестного параметра модели $\mathbf{c}$, которая определяется с помощью предварительной $\sqrt{n}$-состоятельной при $H_{1n}(\mathbf{d})$ оценки $\widehat{\mathbf{c}}_n$, в качестве которой можно взять, например, M-оценку $\widehat{\mathbf{c}}_{n,\mathrm{MD}} := \mathrm{Argmin}_{\mathcal{A}}\widehat{K}_n(\boldsymbol{\theta})$, где

$$\mathcal{A} = \{\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{R}^2 : \ \|\boldsymbol{\theta} - \widehat{\mathbf{c}}\| \leqslant n^{-1/2}\log n, \quad \widehat{K}_n(\boldsymbol{\theta}) = \int_{-\infty}^{\infty} \|\widehat{\mathbf{w}}_n(x, \boldsymbol{\theta})\|^2\, dG(x),$$

$G(x)$ — априорно выбираемая непрерывная ограниченная монотонная функция. В аргументе $\widehat{K}_n(\boldsymbol{\theta})$ стоит остаточный эмпирический двумерный процесс

$$\widehat{\mathbf{w}}_n(x, \boldsymbol{\theta}) := n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n} \frac{\partial\varepsilon_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}[\mathbf{1}\{\varepsilon_t(\boldsymbol{\theta}) \leqslant x\} - \widehat{F}_n(x, \boldsymbol{\theta})],$$

где $\widehat{F}_n(x, \boldsymbol{\theta})$ — эмпирическая функция распределения, построенная по остаткам $\varepsilon_t(\boldsymbol{\theta})$ ARMA модели, которые определяются рекуррентным соотношением

$$\varepsilon_t(\boldsymbol{\theta}) = u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-1}(\boldsymbol{\theta}), \quad t = 1, 2, \ldots, n, \quad \varepsilon_0(\boldsymbol{\theta}) = 0.$$

Теорема. *При H_0 и при $H_{1n}(\mathbf{d})$ имеет место сходимость*

$$n^{1/2}(\widehat{\mathbf{c}}_{n,\mathrm{MD}} - \mathbf{c}) \to \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_{\mathrm{MD}}).$$

В качестве тестовой статистики для проверки H_0 против $H_{1n}(\mathbf{d})$ рассматривается $R^2_{n,\mathrm{MD}} = n(\widehat{\mathbf{c}}_{n,\mathrm{MD}} - \mathbf{c})^T\widehat{\Sigma}^{-1}_{n,\mathrm{MD}}(\widehat{\mathbf{c}}_{n,\mathrm{MD}} - \mathbf{c})$, где $\widehat{\Sigma}_{n,\mathrm{MD}}$ — состоятельная оценка матрицы Σ_{MD}.

В силу теоремы, предельное распределение $R^2_{n,\mathrm{MD}}$ при H_0 есть хи-квадрат распределение с двумя степенями свободы, при $H_{1n}(\mathbf{d})$ — нецентральное хи-квадрат распределение с двумя степенями свободы и параметром нецентральности $\mathbf{d}^T\Sigma^{-1}_{\mathrm{MD}}\mathbf{d}$.

Подсчитана АОЭ MD-тестов относительно знаковых тестов, рассмотренных в [1], в случае, когда ε_t имеют нормальное, логистическое и распределение Тьюки с различными параметрами. Для всех распределений MD-тест оказался предпочтительнее и лучшие результаты получены в случае, когда ε_t имеют распределение с тяжелыми хвостами. В работе [1] показано, что знаковые тесты предпочтительнее классических, ранговых и знаково-ранговых, если инновации имеют распределение с тяжелыми хвостами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болдин М. В., Штуте В.* О знаковых тестах в ARMA модели с возможно бесконечной дисперсией ошибок. — Теория вероятн. и ее примен., 2004, т. 49, в. 3, с. 436–460.