А. В. Жарков (Ульяновск, УлГУ). **Статистические свойства функции Гомпертца.**

Во многих задачах обработки экспериментальных данных в качестве функции теоретического распределения выступает зависимость вида $y = G(x) = e^{-e^{a-bx}}$ [1]. При любых значениях параметров a и b ($b > 0$) это — монотонно возрастающая функция с одной точкой перегиба и множеством значений (0, 1). Рассмотрим две точки на графике этой функции: $x = m$, $G(m) = 0,5$ (медиана распределения), $x = p$, $G''(p) = 0$ (точка перегиба или мода распределения). Обозначим $s = m - p$, при этом всегда $s > 0$. Справедливы соотношения: $a = \beta p/s$ и $b = \beta/s$, где $\beta = -\ln\ln 2$. Тогда $G(x) = G_0(t) = e^{-e^{-\beta t}}$, где $t = (x - p)/s$.

Функцию $G_0(t)$ назовем *стандартной функцией Гомпертца*, а в качестве параметров функции $g(x)$ будем выбирать p и s. Величина p характеризует сдвиг графика вдоль оси абсцисс, а величина s отражает «крутизну» графика в точке перегиба: чем больше s , тем круче график.

Используя численное интегрирование, подсчитаем центральные моменты распределения Гомпертца: математическое ожидание $\mu = \mathbf{M}\,X = p + 1,575s$ дисперсия $\mathbf{D}\,X = 12,245s^2$, среднее квадратическое отклонение $\sigma = 3,50s$, третий центральный момент $\mu_3 = 48,82s^3$, коэффициент асимметрии $\gamma = 1,14$. На графике функции Гомпертца имеется три характерные точки: $p < m < \mu$. Значения функции $G(x)$ в этих точках (при любых значениях параметров): $G(p) = 0,368$, $G(m) = 0,5$, $G(\mu) = 0,570$. График плотности распределения унимодален, $g(p) = 0,135/s$, $g(m) = 0,127/s$, $g(\mu) = 0,117/s$, асимметричен, причем справа от моды более пологий, чем слева.

Свойство асимметрии распределения Гомпертца, по-видимому, определяет интерес к нему в различных областях применения, особенно в гуманитарных науках [2]. Это касается в немалой степени и педагогики, где распределения, например, набранных на ЕГЭ баллов, далеко не всегда нормальны, причем, как правило, имеют положительную асимметрию.

Опишем способы оценки параметров распределения Гомпертца по выборке значений случайной величины $\{x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Действуя методом моментов, подсчитаем эмпирические среднее $\overline{x}$ и среднее квадратическое отклонение σ. Тогда $p = \overline{x} - 0,450\sigma$, $s = 0,286\sigma$. Кроме того, по выборке легко подсчитывается оценка медианы m (значение элемента выборки, делящего отсортированный массив выборки пополам). Тогда $p = m - s$. Другой способ — вычислить таблицу значений эмпирической функции распределения $\{x_i, y_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где y_i — количество элементов выборки, не превосходящих x_i, деленное на n, и для таблицы $\{x_i, y_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где $x_i = \ln(-\ln(y_i))$, методом наименьших квадратов построить регрессионную прямую $z = a - bx$. Тогда в качестве оценок параметров распределения Гомпертца можно взять $p = a/b$, $s = \beta/b$, где $\beta = -\ln\ln 2$. На практике второй способ дает более удовлетворительные результаты.

Для задач математического моделирования реализации распределения Гомпертца легко получаются из равномерного распределения на промежутке (0, 1) по формуле $x_i = p - s\ln(-\ln\omega_i)/\beta$, где ω_i — результат работы стандартной функции типа random().

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гайдышев И.* Анализ и обработка данных. СПб.: Питер, 2001, 752 с.
2. *Делицын Л. Л.* Количественные модели распространения нововведений в сфере информационных и телекоммуникационных технологи. М.: МГУКИ, 2009, 107 с.