Е. А. З о л о т а р е в а (Ростов-на-Дону, ФГОУ ЮФУ). **Математическое моделирование динамики наноструктурных сред.**

Для моделирования динамических процессов в средах с наноструктурными дефектами выведено обобщенное уравнение Ламе в рамках модели градиентной упругости, аналогичное [1], в случае антиплоских колебаний с учетом обозначения сдвиговой скорости $\vartheta \equiv \vartheta_s = \sqrt{\mu/\rho}$ принимающее следующий вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u - c\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2}\right)u = \frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u, \tag{1}$$

вырождающееся при $c = 0$ в классическое волновое уравнение.

В классе прогрессивных волн $u(x, z, t) = U(\alpha, \kappa)\exp\{\gamma z + i\alpha x - i\omega t)$, используя обозначение $\kappa = \omega/\vartheta = \omega\sqrt{\rho/\mu}$, получим биквадратное уравнение для отыскания собственных значений γ, решение которого имеет четыре корня. При $c \to 0$ два собственных значения

$$\gamma_j|_{c\to 0} = \pm 1/\sqrt{c}(1 + c(\alpha^2 + \kappa^2)/2 + O\left(c^2\kappa^4\right), \qquad j = 3, 4, \tag{2}$$

устремляются в бесконечность ($|\gamma_j| \to \infty$), а оставшиеся два переходят в предельные, соответствующие задаче антиплоского сдвига

$$\gamma_j|_{c\to 0} = \pm\sqrt{\alpha^2 - \kappa^2}(1 + O\left(c\right)), \qquad j = 1, 2. \tag{3}$$

Таким образом, общее решение (1) для поля смещений однопараметрической градиентной упругости принимает вид

$$u(x, z, t) = \exp\{i\alpha x - i\omega t\}\sum_{j=1}^{4} U_j(\alpha, \kappa)\,\exp\{\gamma_j z\}. \tag{4}$$

Из (2) и (3) следует, что в общем решении (4) первые два слагаемых ($j = 1, 2$) представляют регулярные составляющие и обеспечивают предельный переход при $c \to 0$ результатов градиентной упругости в общее решение задачи антиплоского сдвига классической теории упругости. Оставшиеся слагаемые ($j = 3, 4$), обусловленные градиентной моделью, при естественных условиях ограниченности решения (4) принимающих вид

$$\gamma_j z| = |z/\sqrt{c}|\left\{1 + O\left(c(\alpha^2 + \kappa^2)\right)\right\}_{c\to 0} \leqslant \text{const}, \quad \alpha^2 + \kappa^2 \leqslant \text{const}, \qquad j = 3, 4,$$

определяют погранслойные составляющие смещения, вносящие конечный вклад в решение (4) при $c \to 0$ лишь для малых значений z.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Le Roux.* Etude geometrique de la torsion et de la flexion. — Ann. Scient. De L'Ecole Normale Sup., Paris, 1911, v. 28.