В. А. Ивницкий (Москва, МГУПС)**. Определение корреляционных функций количества «нетерпеливых» требований в узлах замкнутой сети массового обслуживания.**

В работе, представленной данным сообщением, для нахождения взаимно корреляционных функций количества «нетерпеливых» требований в узлах замкнутой сети массового обслуживания (ЗСеМО) применяется метод стохастических разностных уравнений [1]–[2].

Пусть в ЗСеМО имеется m узлов и циркулирует N требований. Длительность обслуживания в i-м узле ξ_i имеет экспоненциальное распределение с параметром μ_i. Все N требований являются «нетерпеливыми» требованиями. Время их пребывания в i-м узле ограничено случайной величиной γ_i, имеющей экспоненциальное распределение с параметром α_i. Если у требования, которое обслуживается в i-м узле, $\xi_i < \gamma_i$, то требование завершает свое обслуживание. После завершения обслуживания в i-м узле это требование с вероятностью P_{ij} поступает на обслуживание в j-й узел, $\sum_{j=1}^m P_{ij} = 1$, $i = 1, \dots, n$, и сразу начинает обслуживаться. Если у требования, которое обслуживается в i-м узле, $\xi_i > \gamma_i$, то требование в момент γ_i после начала обслуживания покидает i-й узел и с вероятностью $\overline{P}_{ij}$ поступает на обслуживание в j-й узел, $\sum_{j=1}^m \overline{P}_{ij} = 1$, $i = 1, \dots, n$, и сразу начинает обслуживаться. Матрицы $(P_{ij})_{m\times m}$ и $(\overline{P}_{ij})_{m\times n}$ неразложимы. Обозначим $\nu_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, число требований в i-м узле в момент t. Процесс $\zeta(t) = \{\nu_1(t), \dots, \nu_m(t)\}$ является марковским. Требуется определить корреляционные функции процессов $\nu_i(t)$ по узлам и их взаимно корреляционные функции по парам узлов.

Так как уравнения для $n_i(t) = \mathbf{M}\,\nu_i(t)$ уже получены в [2], то остается найти уравнения для смешанных моментов $\mathbf{M}\,\nu_i(t)\nu_i(t')$ и $\mathbf{M}\,\nu_i(t)\nu_k(t')$.

Введем обозначения: $\widetilde{n}_{ik}(s,u) = \int_0^\infty\int_0^\infty \mathbf{M}\,\nu_i(t)\nu_k(t')e^{-st-ut'}\,dt\,dt'$, $\widetilde{n}_{1ik} = \int_0^\infty \mathbf{M}\,\nu_i(t)\nu_k(0)e^{-st}\,dt$, $\widetilde{n}_{2ik}(0,u) = \int_0^\infty e^{-ut}\mathbf{M}\,\nu_i(0)\nu_k(t)\,dt$, $i,k = 1, \dots, m-1$. Пусть также $q_i = \mu_i + \alpha_i$, $i = 1, \dots, m-1$, $Q_{ik} = \mu_i P_{ik} + \alpha_i \overline{P}_{ik}$, $i,k = 1, \dots, m-1$.

Теорема. *Для двойных преобразований Лапласа нестационарных смешанных моментов справедлива следующая система линейных алгебраических уравнений*:

$$
\begin{aligned}
{}[su - (Q_{mk}+q_k)(Q_{mi}+q_i)]\,\widetilde{n}_{ik}(s,u) = &- \sum_{d=1,\,d\neq k}^{m-1} (Q_{mi}+q_i)(Q_{dk}-Q_{mk})\widetilde{n}_{id}(s,u) \\
&- \sum_{j=1,\,j\neq i}^{m-1} (Q_{mk}+q_k)(Q_{ji}-Q_{mi})\widetilde{n}_{jk}(s,u) \\
&+ \sum_{j=1,\,j\neq i}^{m-1} \sum_{d=1,\,d\neq k} (Q_{ji}-Q_{mi})(Q_{dk}-Q_{mk})\widetilde{n}_{jd}(s,u) \\
&- Nu^{-1}q_iQ_{mk}\widetilde{n}_i(s) - \widetilde{n}_k(u)Nq_kQ_{mi}s^{-1} \\
&+ Ns^{-1}\sum_{d=1,\,d\neq k}^{m-1} Q_{mi}Q_{dk}\widetilde{n}_d(u) + Nu^{-1}\sum_{j=1,\,j\neq i}^{m-1} Q_{ji}Q_{mk}\widetilde{n}_j(s) \\
&+ NQ_{mi}Q_{mk}\biggl(Nu^{-1}s^{-1} - u^{-1}\sum_{l=1}^{m-1}\widetilde{n}_l(s) - s^{-1}\sum_{l=1}^{m-1}\widetilde{n}_l(u)\biggr) \\
&+ s\widetilde{n}_{1ik}(s,0) + u\widetilde{n}_{2ik}(0,u) - \mathbf{M}\,\nu_i(0)\nu_k(0), \qquad 1 \leqslant i \neq k \leqslant m-1, \qquad (1)
\end{aligned}
$$

$$
[su - (Q_{mk}+q_k)^2]\,\widetilde{n}_{ii}(s,u) = - \sum_{j=1,\,d\neq i}^{m-1} (Q_{mi}+q_i)(Q_{ji}-Q_{mi})[\widetilde{n}_{ij}(s,u) + \widetilde{n}_{ji}(s,u)]
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{j=1,\,j\neq i}^{m-1}\ \sum_{d=1,\,d\neq i}(Q_{ji}-Q_{mi})(Q_{di}-Q_{mi})\widetilde{n}_{jd}(s,u)\\
&-Nq_iQ_{mi}[u^{-1}\widetilde{n}_i(s)+s^{-1}\widetilde{n}_i(u)]\\
&+N\sum_{d=1,\,d\neq i}^{m-1}Q_{mi}Q_{di}[s^{-1}\widetilde{n}_d(u)+u^{-1}\widetilde{n}_d(s)]\\
&+NQ_{mi}^2\left[Nu^{-1}s^{-1}-u^{-1}\sum_{l=1}^{m-1}\widetilde{n}_i(s)-s^{-1}\sum_{l=1}^{m-1}\widetilde{n}_l(u)\right]\\
&+s\widetilde{n}_{1ii}(s,0)+u\widetilde{n}_{2ii}(0,u)-\mathbf{M}\,\nu_i(0)^2,\qquad i=1,\ldots,m-1,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где $\widetilde{n}_{1ik}(s,0)$ *определяются следующей системой линейных уравнений:*

$$
\begin{aligned}
(s+q_i+Q_{mi})\widetilde{n}_{1ki}(s,0)=\sum_{j=1,\,j\neq 1}^{m-1}\widetilde{n}_{1kj}(s,0)(Q_{ji}-Q_{mi})\\
+Ns^{-1}Q_{mi}+\mathbf{M}\,\nu_i(0)\nu_k(0),\qquad i,k=1,\ldots,m-1,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

и $\widetilde{n}_{2ik}$ *определяются аналогичной системой линейных уравнений.*

Вычитая из $\mathbf{M}\,\nu_i(t)\nu_k(t')$ произведение $\mathbf{M}\,\nu_i(t)\mathbf{M}\,\nu_k(t')$, определяем искомые корреляционные функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ивницкий В. А.*, *Ивницкий О. В.* Нахождение нестационарных математических ожиданий количества «нетерпеливых» требований в узлах замкнутой сети массового обслуживания. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2008, т. 15, в. 3, с. 304–305.
2. *Ивницкий В. А.* Определение корреляционных функций количества требований в узлах замкнутой сети массового обслуживания с возможностью обхода узлов требованиями. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 3, с. 304–305.