

А. М. Ионов, М. С. Матвейчук (Ульяновск, УлГПУ, Казань, НИИММ). Мера на U -проекторах.

Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра Неймана в комплексном гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и пусть $U \in \mathcal{M}$ — унитарный оператор. Обозначим $R(U)$ ($R(U^2)$ соответственно) слабозамкнутую алгебру, порожденную операторами U, U^{-1} (U^2, U^{-2} соответственно), $R(U)^{pr}$ ($R(U^2)^{pr}$) — множество всех ортопроекторов из $R(U)$ ($R(U^2)$ соответственно). Определим произведение $\langle x, y \rangle_U := (Ux, y)$, $x, y \in H$. В общем случае $\langle x, y \rangle_U \neq \overline{\langle y, x \rangle_U}$. Если $U = U^*$ и $U \neq \pm I$, то $(U \cdot, \cdot)$ — индефинитная метрика. Для любого $B \in B(H)$ существует единственный $B^\# \in B(H)$, для которого $\langle Bx, y \rangle_U = \langle x, B^\#y \rangle_U$; $(B^\#)^\# = B \Leftrightarrow BU^2 = U^2B$. Положим $\mathcal{P}_U(\mathcal{M}) := \{p \in \mathcal{M}: p^2 = p = p^\#\}$. Операторы из $\mathcal{P}_U(\mathcal{M})$ назовем U -проекторами. U -проекторы образуют логику. Введем $\mathcal{M}^U := \{A \in \mathcal{M}: AU^2 = U^2A\}$ и множество W всех частичных изометрий $w \in \mathcal{M}$ таких, что $UwU^{-1} = -w$. Отметим следующее. 1) $w \in W \Leftrightarrow w^* \in W$. 2) $W \neq \{0\} \Leftrightarrow R(U) \setminus R(U^2) \neq \emptyset$. 3) Пусть $G := \{p \in R^{pr}(U^2): \text{ для любых } q \in R^{pr}(U), q \leq p \Rightarrow q \in R(U^2)\}$ и $E := \vee \{p: p \in G\}$. Тогда E — наибольший проектор из $R(U^2)$, для которого $pE = Ep = p^*E$, $\forall p \in \mathcal{P}_U(\mathcal{M})$. 4) $wE = 0$ для всех $w \in W$. 5) $E^\perp = \vee \{w^*w: w \in W\}$, $E^\perp := I - E$. Пусть $U = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda} e_U(d\lambda)$ — спектральное разложение U . Здесь $e_U: \mathcal{B}_S \rightarrow \mathcal{P}_U$ есть спектральная мера на σ -алгебре $\mathcal{B}_S$ борелевских подмножеств $S \subset \mathbb{C}$. Определим $J_U := 2e - I$, где $e := e_U([0, \pi))$. Положим $\mathcal{P}_U^{or} := \{p \in \mathcal{P}_U: p \leq E\}$, $\mathcal{P}_U^h := \{p \in \mathcal{P}_U: p \leq E^\perp\}$. По 3) $\mathcal{P}_U^{or}$ состоит только из ортопроекторов.

Следующая теорема сводит описание мер на U -проекторах к описанию мер на J_U -проекторах в пространстве с индефинитной метрикой.

Теорема 1. $\mathcal{P}_U(\mathcal{M}) = \mathcal{P}_{J_U}(\mathcal{M}^U)$. $\mathcal{P}_U(\mathcal{M})$ — сумма сферической $\mathcal{P}_U^{or}$ и гиперболической $\mathcal{P}_U^h$ подлогики.

Любой J_U -проектор p (не единственным образом) представляется в виде суммы $p = p_+ + p_-$, где p_+ (p_-) — J_U -неотрицательный (-неположительный, соответственно) проекторы из $\mathcal{M}^U$. Пусть $p, p_i \in \mathcal{P}_U(\mathcal{M})$, $i \in I$, таковы, что $p = \sum_i p_i$, $p_i p_j = 0$, $i \neq j$. Сумма понимается в сильном смысле. Отображение $\nu: \mathcal{P}_U(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ называется мерой, если $\nu(p) = \sum_i \nu(p_i)$. Мера ν индефинитна, если $\nu(p_+) \geq 0$, $\nu(p_-) \leq 0$, $\forall p \in \mathcal{P}_U(\mathcal{M})$; вероятностная, если $\nu \geq 0$ и $\nu(I) = 1$; ограниченная, если $\sup\{(1/\|p\|)|\nu(p)|: p \in \mathcal{P}_U(\mathcal{M}), p \neq 0\} < \infty$; полуслед, если существует присоединенный к центру алгебры $\mathcal{M}^U$ оператор T , для которого $\nu(p) = \tau(Tp_+) \forall p$ или $\nu = \tau(Tp_-) \forall p$. Здесь τ — точный нормальный полуконечный след на $(\mathcal{M}^U)^+$. Индефинитная мера описана в [1].

Теорема 2. Пусть $\mathcal{M}^U$ не имеет прямого слагаемого типа $I_{n,m}$, $n, m \leq 2$. Тогда: 1) если мера ограничена и постоянна на множестве всех максимальных положительных (максимальных отрицательных) проекторов, то ее сужение на $\mathcal{P}_U^h$ есть сумма полуследов; 2) если ν — вероятность, то ее сужение на $\mathcal{P}_U^h$ есть сумма полуследов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Matvejchuk M. Measures on effects and on projections in spaces with indefinite metric. — Fields Instit. Communications, 2000, v. 25, p. 399–414.