А. А. К а с а т к и н (Уфа, УГАТУ). **Применение метода инвариантных подпространств к уравнениям с дробными производными.**

В работах В. А. Галактионова и С. Р. Свирщевского (см., например, [1] и приведенный там список литературы) развит метод построения частных решений уравнений эволюционного типа $u_t = F(u, u_x, u_{xx}, \ldots)$, который за счет выбора инвариантного относительно действия нелинейного дифференциального оператора F подпространства функций $u(x,t)$ позволяет свести исходное уравнение к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Тот же метод можно использовать для построения точных решений уравнений вида $D_t^\alpha u(x,t) = F(u, u_x, u_{xx}, \ldots)$ с дробной производной Римана–Лиувилля по t:

$$D_t^\alpha u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^x \frac{f(\xi)}{(t-\xi)^{\alpha+1-n}}\, d\xi, \qquad n-1 < \alpha < n.$$

После выбора базисных функций $\phi_1(x), \ldots, \phi_m(x)$ инвариантного относительно действия F подпространства и подстановки соответствующего вида u в уравнение оно сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с дробными производными. Такие системы, в отличие от систем с производными первого порядка, могут быть проклассифицированы по допускаемым группам точечных преобразований. В результате перечисляются те системы уравнений, решения которых могут быть построены с помощью методов группового анализа [2].

В качестве простейшего примера рассмотрим уравнение

$$D_t^\alpha u = u u_x. \tag{1}$$

Выбирая базис инвариантного подпространства $\{1, x\}$, ищем частное решение в виде $u = y(t) + xz(t)$. Уравнение (1) сводится к системе $D^\alpha y = yz$, $D^\alpha z = z^2$, которая, согласно результату классификации, имеет три допускаемых оператора:

$$X_1 = t\frac{\partial}{\partial t} - \alpha z \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2 = y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = z\frac{\partial}{\partial y}.$$

Инвариантное решение имеет вид $y = ct^{-\alpha}$, $z = t^{-\alpha}\Gamma(1-\alpha)/\Gamma(2-\alpha)$, следовательно, $u = ct^{-\alpha} + xt^{-\alpha}\Gamma(1-\alpha)/\Gamma(2-\alpha)$ есть частное решение (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Galaktionouv V. A., Svirshchevskii S. R.* Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics. — Chapman & Hall/CRC Taylor & Francis Group applied mathematics and nonlinear science series, 2007.
2. *Газизов Р. К., Касаткин А. А., Лукащук С. Ю.* Непрерывные группы преобразований дифференциальных уравнений дробного порядка. — Вестник УГАТУ, 2007, т. 9, № 3 (21), с. 125–135.