В. А. К о п ы т ц е в, В. Г. М и х а й л о в (Москва, ТВП, МИАН). **Исследование числа решений случайных нелинейных систем включений путем сведения их к линейным системам включений.**

Включением (над полем K) размерности T относительно n-мерного вектора x мы называем запись $F(x) \in B$, где $F(x)$: $V^n \to V^T$ есть отображение пространства n-мерных векторов V^n в пространство V^T, а $B \subset V^T$. Далее $K = \mathrm{GF}\,(q)$.

Рассмотрим случайное отображение $AG(x)$: $V^n \to V^T$, где $G(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))$: $V^n \to V^m$, а A — случайная матрица размера $T \times m$. Пусть $D \subseteq V^n$. Обозначим $\xi(D, AG, B)$ число решений системы включений $x \in D$, $AG(x) \in B$.

В том случае, когда ограничение отображения G на множество D обратимо, число решений системы $x \in D$, $AG(x) \in B$ совпадает с числом решений системы линейных включений $y \in G(D)$, $Ay \in B$. Это обстоятельство позволяет применить для описания свойств распределения случайной величины $\xi(D, AG, B)$ результаты работы [1]. Сформулируем полученный результат.

Обозначим $N(a_1, a_2, a_3, d, B)$ число решений уравнения $a_1u^1 \oplus a_2u^2 \oplus a_3u^3 = d$ относительно тройки векторов $(u^1, u^2, u^3) \in B^3$, где $a_1, a_2, a_3 \in K\backslash\{0\}$, $d \in V^T$. Пусть $N(B) = \max_{a_1,a_2,a_3,d} N(a_1, a_2, a_3, d, B)$, $\rho(B) = N(B)/|B|^2$. Очевидно, что $0 \leqslant \rho(B) \leqslant 1$. Для линейных и аффинных подпространств эта величина принимает максимально возможное значение $\rho(B) = 1$.

Пусть элементы случайной матрицы $A = \|a_{i,j}\|$ независимы в совокупности и распределены с вероятностями

$$\mathbf{P}\{a_{i,j} = k\} = \frac{1 + \Delta_{i,j}(k)}{q}, \qquad k \in K,$$

где $\sum_{k\in K} \Delta_{i,j}(k) = 0$, $i = 1, \dots, T$, $j = 1, \dots, m$. Положим $\Delta = \max_{i,j,k} |\Delta_{i,j}(k)| < 1$. Разобьем множество $G(D)\times B$ на классы подобных векторов $(G(D)B)_1, \dots, (G(D)B)_M$ (векторы z и z' считаются подобными, если $z' = cz$, $c \neq 0$), где M — общее число таких классов. Положим

$$l_r(G(D), B) = |\{k \in \{1, \dots, M\}\colon\ |G(D)B)_k| = r\}|, \qquad r = 1, \dots, q-1.$$

Пусть $\pi_1(\lambda_1), \dots, \pi_{q-1}(\lambda_{q-1})$ — независимые в совокупности случайные величины, распределенные по закону Пуассона с параметрами $\lambda_1, \dots, \lambda_{q-1}$ соответственно.

Теорема. *Пусть отображение $D \to G(D)$ обратимо, причем $0 \notin G(D)$, выполнены условия $n, T \to \infty$, $T\Delta \to 0$, $|D| \to \infty$ и соотношения*

$$\rho(G(D))\rho(B) \to 0, \quad q^{-T} l_r(G(D), B) \to \lambda_r,$$

$$0 \leqslant \lambda_r < \infty \ (r = 1, \dots, q-1), \quad \exists r:\ \lambda_r > 0.$$

Тогда распределение случайной величины $\xi(D, AG, B)$ сходится к распределению выражения $\pi_1(\lambda_1) + 2\pi_2(\lambda_2) + \dots + (q-1)\pi_{q-1}(\lambda_{q-1})$.

З а м е ч а н и е 1. Пусть $F(x) = A_1x + A_2f(x)$ при случайных матрицах A_1 и A_2 (над полем K) размерности $T \times n$ и $T \times (m-n)$ соответственно с независимыми в совокупности случайными элементами и при заданном отображении $f(x)$: $V^n \to V^{m-n}$. Отображение $G(x) = (x, f(x))$ является обратимым отображением множества V^n на множество V^m. Поэтому условие обратимости теоремы выполнено для любого $D \subseteq V^n$. Кроме того, в данном случае из $\rho(D) \to 0$ следует, что $\rho(G(D)) \to 0$.

З а м е ч а н и е 2. В рассмотренный класс случайных включений входят системы нелинейных уравнений, в которых левые части уравнений независимы и имеют равномерные распределения на множестве функций заданной степени нелинейности.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект № 08-01-00078а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Копытцев В. А.*, *Михайлов В. Г.* Теоремы пуассоновского типа для числа специальных решений случайного линейного включения. — Дискретная математика, 2010, т. 22, в. 2.