В. А. Копытцев, В. Г. Михайлов (Москва, ТВП, МИАН). **Предельная теорема для числа ненулевых решений случайного включения.**

Включением размерности T относительно n-мерного вектора мы называем запись $F(x) \in B$, где $F(x)$: $V^n \to V^T$ есть отображение пространства n-мерных векторов V^n в пространство V^T над полем K, а $B \subset V^T$. Далее $K = \mathrm{GF}\,(q)$.

Пусть $F(x) = A_1 x + A_2 f(x)$ при случайных матрицах A_1 и A_2 (над полем K) размерности $T \times n$ и $T \times (m-n)$ соответственно с независимыми в совокупности случайными элементами и при таком заданном отображении $f(x) = (f_{n+1}(x), \ldots, f_m(x))$: $V^n \to V^{m-n}$, что $f(0^n) = 0^{m-n}$. Нас интересует поведение распределения общего числа ξ ненулевых решений случайного включения $A_1 x + A_2 f(x) \in B$ при $n, T \to \infty$.

Отметим, что при $n, T \to \infty$ речь идет о последовательности матриц $A_1 = A_1(n,T)$ и $A_2 = A_2(n,T)$, последовательности функций $f(x) = f(x,n,T)$ (причем $m = m(n,T)$) и последовательности множеств $B = B(T) \subset V^T$.

Пусть H_f — множество тех ненулевых векторов $y = (y_1, \ldots, y_m) \in V^m$, для которых найдется такой вектор $x \in V^n$, что $y_1 = x_1, \ldots, y_n = x_n$, $y_{n+1} = f_{n+1}(x), \ldots, y_m = f_m(x)$. Разобьем множество $H_f \times B$ на классы подобных векторов $(H_f B)_1, \ldots, (H_f B)_M$ (векторы z и z' являются подобными, если $z' = cz$, $c \neq 0$), где M — общее число таких классов. Пусть $l_r(H_f, B)$ — число классов мощности r, $r = 1, \ldots, q-1$.

Пусть $\pi_1(\lambda_1), \ldots, \pi_{q-1}(\lambda_{q-1})$ — независимые в совокупности случайные величины, распределенные по закону Пуассона с параметрами $\lambda_1, \ldots, \lambda_{q-1}$ соответственно. Пусть матрица A размера $T \times m$ образована объединением столбцов матриц A_1 и A_2.

Из теоремы, приведенной в [1], вытекает следующее утверждение (определения характеристики $\Delta = \Delta(A)$ матрицы A и характеристики $\rho(B)$ множества B см. в [1] и [2]; упомянем лишь, что свойство $\Delta(A) \to 0$ означает сближение распределения матрицы A с равномерным, а свойство $\rho(B) \to 0$ означает асимптотическую свободу множества B от линейных комбинаций).

Теорема 1. *Пусть $n, T \to \infty$, выполнены условия $T\Delta \to 0$ и*

$$\rho(H_f)\rho(B) \to 0, \tag{1}$$

$$q^{-T} l_r(H_f, B) \to \lambda_r, \quad 0 \leqslant \lambda_r < \infty \ (r = 1, \ldots, q-1), \quad \exists r:\ \lambda_r > 0. \tag{2}$$

Тогда распределение случайной величины ξ сходится к распределению выражения $\pi(\lambda_1, \ldots, \lambda_{q-1}) = \pi_1(\lambda_1) + 2\pi_2(\lambda_2) + \cdots + (q-1)\pi_{q-1}(\lambda_{q-1})$.

Оказалось, что за счет некоторых ограничений на возможный рост множества B можно заметно ослабить требования к скорости сходимости распределения матрицы A к равномерному.

Теорема 2. *Пусть $n, T \to \infty$, выполнены условия $\Delta \to 0$,*

$$|B| \leqslant q^{\delta T} \quad (0 < \delta < 1), \tag{3}$$

а также соотношения (1) и (2). Тогда распределение случайной величины ξ сходится к распределению величины $\pi(\lambda_1, \ldots, \lambda_{q-1})$.

Доказательство теоремы 2 проводится по схеме доказательства теоремы 3 работы [2] и опирается на многомерную версию известной теоремы Б. А. Севастьянова об условиях выполнения предельной теоремы Пуассона для суммы зависимых индикаторов.

Замечание 1. В теореме 1 использовалось существенно более жесткое условие $T\Delta \to 0$, но отсутствовало ограничение $|B| \leqslant q^{\delta T}$.

Замечание 2. Условие (3) выполнено, например, для шаров радиуса r в метрике Хемминга, если $r \geqslant 1$ и $rT^{-1} \leqslant \mu < (q-1)q^{-1}$. Напротив, оно не выполнено для сфер в этой метрике, если их радиус $r \approx T(q-1)q^{-1}$.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект № 08-01-00078а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Копытцев В. А.*, *Михайлов В. Г.* Исследование числа решений случайных нелинейных систем включений путем сведения их к линейным системам включений. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2010, т. 17.
2. *Копытцев В. А.*, *Михайлов В. Г.* Теоремы пуассоновского типа для числа специальных решений случайного линейного включения. — Дискретн. матем., 2010, т. 22, в. 2.