Е. С. Паламарчук (Москва, ЦЭМИ РАН). **Вероятностные свойства оптимального управления для линейного регулятора с дисконтированием.**

Исследуется процесс дефекта оптимального в среднем управления в одномерной задаче стохастического линейного регулятора с дисконтированием на бесконечном интервале времени.

Пусть на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ задан одномерный случайный процесс $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$, описываемый уравнением

$$dX_t = aX_t\,dt + bU_t\,dt + \sigma\,dW_t, \qquad X_0 = x, \tag{1}$$

где $\{W_t\}_{t=0}^{\infty}$ — одномерный стандартный винеровский процесс, $a, b \neq 0$, $\sigma > 0$ — константы. В качестве множеста допустимых управление $\mathcal{U}$ рассмотрим такие процессы $\{U_t\}_{t=0}^{\infty}$, согласованные с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$, $\mathcal{F}_t = \sigma\{W_s,\ s \leqslant t\}$, что уравнение (1) имеет решение. Определим целевой функционал

$$J_{\infty}^{\gamma}(U) = \biggl\{\int_0^{\infty} e^{-\gamma t}(mX_t^2 + kU_t^2)\,dt\biggr\}, \tag{2}$$

где $m > 0$, $k > 0$, $\gamma > 0$ — константы (γ — дисконтный множитель). Введем также в рассмотрение функционал

$$J_T^{\gamma}(U^T) = \biggl\{\int_0^{T} e^{-\gamma t}(mX_t^2 + kU_t^2)\,dt\biggr\}, \tag{3}$$

где T — конечный момент времени, U^T — сужение управления U на интервале $[0, T]$. Функционалы вида (2) и (3), учитывающие дисконтирование, широко применяются при исследовании различных экономических задач [1]. В данной ситуации естественно рассмотреть задачу минимизации среднего значения функционала качества (2)

$$EJ_{\infty}^{\gamma}(U) \to \inf_{U\in\mathcal{U}} \tag{4}$$

и найти управление $\{U_t^*\}_{t=0}^{\infty}$, являющееся ее решением, так называемое управление, «оптимальное в среднем». Можно показать, что это управление имеет вид

$$U_t^* = -\frac{b\Pi_{\gamma}}{k}X_t^*, \tag{5}$$

где процесс $\{X_t^*\}_{t=0}^{\infty}$ задается уравнением

$$dX_t^* = \biggl(a - \frac{b^2\Pi_{\gamma}}{k}\biggr)X_t^*\,dt + \sigma\,dW_t, \quad X_0^* = x,$$

при этом константа Π_{γ} является бо́льшим корнем уравнения

$$-\gamma\Pi_{\gamma} + 2a\Pi_{\gamma} - \frac{b^2\Pi_{\gamma}^2}{k} + m = 0.$$

Применение управления $\{U_t^*\}_{t=0}^{\infty}$ позволит получить среднее значение функционала качества, равное $EJ_{\infty}^{\gamma}(U^*) = \Pi_{\gamma}Ex^2 + \Pi_{\gamma}\sigma^2/\gamma$.

Зафиксируем $U \in \mathcal{U}$ — некоторое произвольное допустимое управление, тогда $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ — соответствующий ему процесс, определяемый уравнением (1). Введем понятие процесса дефекта оптимального в среднем управления (5) на управлении $U \in \mathcal{U}$ как разность $\Delta_T^{\gamma}(U) := J_T^{\gamma}(U^*) - J_T^{\gamma}(U)$. Тем самым для различных $U \in \mathcal{U}$

мы будем иметь семейство процессов $\{\Delta_T^\gamma(U)\}_{U\in\mathcal{U}}$. Целью исследования является получение так называемой *верхней функции*.

О п р е д е л е н и е. Возрастающая функция h_T является *верхней функцией* для семейства процессов дефекта $\{\Delta_T^\gamma(U)\}_{U\in\mathcal{U}}$, если для любого $U \in \mathcal{U}$ существует почти наверное такой конечный момент времени T_0, что $\Delta_T^\gamma(U) \leqslant h_T$ почти наверное для $T > T_0$. Задача поиска верхней функции для совокупности процессов дефекта управления, оптимального в задаче

$$\lim_{T\to\infty} sup \frac{EJ_T^0(U)}{T} \to \inf_{U\in\mathcal{U}}, \tag{6}$$

рассматривалась в [2] и была получена верхняя функция вида $h_T = c\ln T$ (c — некоторая константа). Для задачи с дисконтированием (1)–(4) справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Любая такая функция h_T, что $h_T \to \infty$ при $T \to \infty$, является верхней функцией для семейства процессов дефекта $\{\Delta_T^\gamma(U)\}_{U\in\mathcal{U}}$.*

Таким образом, рассмотрение функционала качества с дисконтированием позволяет получить верхнюю функцию для процесса дефекта, растущую медленнее, чем в задаче (6) с функционалом «среднее на единицу времени». Этот результат показывает, что введение дисконтного множителя существенно изменяет вероятностные свойства процесса дефекта оптимального в среднем управления (5).

Работа поддержана РФФИ, проект № 10-01-00767.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ljungqvist L.*, *Sargent T.* Recursive macroeconomic theory. MIT Press, 2004, 1116 p.
2. *Белкина Т. А.*, *Кабанов Ю. М.*, *Пресман Э. Л.* О стохастической оптимальности для линейно-квадратического регулятора. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 4, с. 661–675.