О. В. К у з ь м и н, М. В. С е р е г и н а (Иркутск, ИГУ, Чита, ЗабИЖТ). **Восходящие сечения обобщенной пирамиды Паскаля и модели развития популяций.**

Обобщенной пирамидой Паскаля (ОПП) называется (см. [1]) трехгранный пирамидальный массив, элементы которого для целых неотрицательных n, k, l удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$V(n,k,l) = \alpha_{n,k-1,l}V(n-1,k-1,l) + \beta_{n,k,l-1}V(n-1,k,l-1) + \gamma_{n,k,l}V(n-1,k,l),$$

с граничными условиями $V(0,0,0) = V_0$, $V(n,k,l) = 0$, если $\min\{n,k,l,n-k-l\} < 0$.

Вершину ОПП совместим с началом прямоугольной декартовой системы координат в пространстве, а его элементы — с точками решетки первого октанта, имеющими неотрицательные координаты. При этом числа n расположим по оси абсцисс, k — по оси ординат, l — по оси аппликат. Тем самым устанавливается соответствие между точками решетки и элементами ОПП, которая будет ограничена плоскостями $k = 0$, $l = 0$ и $n - k - l = 0$.

Рассмотрим произвольное плоское сечение ОПП, представляющее собой некоторый треугольник. Обозначим φ и ψ углы, образованные этим сечением с осями ординат и аппликат соответственно. Тогда уравнение сечения будет иметь вид

$$n + \operatorname{tg}\varphi\, k + \operatorname{tg}\psi\, l = \mathrm{const}. \tag{1}$$

Нумеруем все параллельные между собою сечения ОПП, заданные уравнением (1), начиная от вершины пирамиды, и рассматриваем последовательность $\{S_N(\operatorname{tg}\varphi, \operatorname{tg}\psi)t\}$, $N \in \mathbf{N}_0$, сумм элементов таких сечений.

Пусть $\operatorname{tg}\varphi = p_1$, $\operatorname{tg}\psi = p_2$, $p_1, p_2 \in \mathbf{N}_0$, тогда уравнение (1) примет вид $n + p_1 k + p_2 l = \mathrm{const}$.

Введем в рассмотрение суммы

$$S_N(p_1, p_2), \qquad p_1, p_2 \in \mathbf{N}_0, \tag{2}$$

элементов N-го плоского восходящего сечения ОПП.

Лемма. *Значение сумм* (2) *задается равенством*

$$S_N(p_1,p_2) = \sum_{m=0}^{[N/(p_2+1)]} \sum_{r=0}^{N/(p_1+1)]} V(N - p_2 m - p_1 r, r, m). \tag{3}$$

Суммы (2) допускают следующую интерпретацию в терминах развития популяции.

Пусть популяция состоит из одинаковых элементов, обладающих двумя свойствами: $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Развитие популяции рассматриваем дискретно по итогам его последовательных этапов, номера которых $N \geqslant 0$, и по двойным номерам элементов (r,m) — степеням обладания элементом свойствами $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно ($r, m \geqslant 0$, $r + m \leqslant N$). Пусть элементы $(r+1,m)$-го вида порождаются по прошествии $p_1 + 1$ этапов развития популяции, элементы $(r,m+1)$-го вида порождаются по прошествии $p_2 + 1$ этапов развития популяции, элементы (r,m)-го вида порождаются на каждом этапе развития популяции ($p_1, p_2 \in \mathbf{N}_0$), т. е. ориентируемся на эволюцию без отступлений.

Теорема 1. *Общий объем популяции S_N в итоге N-го этапа задается равенством* (3).

Числа $V(n,k,l)$ в соотношении (3) имеют следующую интерпретацию: $V(N - p_2 m - p_1 r, r, m)$ — объем (количество) элементов (r,m)-го вида в итоге N-го этапа.

Пусть X — сумма элементов $x(x_1, x_2, x_3)$. Введем в рассмотрение линейный оператор $\odot w_{w_1,w_2,w_3}(X)$, который каждому слагаемому $x(x_1, x_2, x_3)$ суммы X ставит в соответствие слагаемое $w_{x_1+w_1,x_2+w_2,x_3+w_3}\, x(x_1, x_2, x_3)$ суммы $\odot w_{w_1,w_2,w_3}(X)$.

Теорема 2. *Общий объем популяции удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$S_N = \odot\alpha_{1,0,0}(S_{N-p_1-1}) + \odot\beta_{1,0,0}(S_{N-p_2-1}) + \odot\gamma_{1,0,0}(S_{N-1}) \qquad (4)$$

с начальными условиями $S_0 = V_0$, *а* S_I, $I = 1, \ldots, \min\{p_1, p_2\}$, *задаются соотношением*

$$S_I = V_0 \prod_{i=1}^{I} \gamma_{i,0,0}; \qquad (5)$$

S_J, $J = \min\{p_1, p_2\} + 1, \ldots, \max\{p_1, p_2\}$, *задаются соотношениями*

$$S_J = \begin{cases} \odot\alpha_{1,0,0}(S_{J-p_1-1}) + \odot\gamma_{1,0,0}(S_{J-1}), & \text{если } p_2 > p_1, \\ \odot\beta_{1,0,0}(S_{J-p_2-1}) + \odot\gamma_{1,0,0}(S_{J-1}), & \text{если } p_1 > p_2. \end{cases} \qquad (6)$$

Операторы $\odot\alpha_{1,0,0}$, $\odot\beta_{1,0,0}$, $\odot\gamma_{1,0,0}$ и коэффициенты $\gamma_{i,0,0}$ в соотношениях (4)–(6) имеют следующую интерпретацию: $\odot\alpha_{1,0,0}$ — оператор, производящий коэффициенты вида $\alpha_{N-p_2m-p_1r,r,m}$, представляющие собой доли от объема $V(N-1-p_2m-p_1r, r, m)$, в котором элементы (r, m)-го вида породили элементы $(r+1, m)$-го вида по прошествии $p_1 + 1$ этапов развития популяции; $\odot\beta_{1,0,0}$ — оператор, производящий коэффициенты вида $\beta_{N-p_2m-p_1r,r,m}$, представляющие собой доли от объема $V(N-1-p_2m-p_1r, r, m)$, в котором элементы (r, m)-го вида породили элементы $(r, m+1)$-го вида по прошествии p_2+1 этапов развития популяции; $\odot\gamma_{1,0,0}$ — оператор, производящий коэффициенты вида $\gamma_{N-p_2m-p_1r,r,m}$, которые представляют собой доли элементов (r, m)-го вида, сохранившиеся от объема $V(N-1-p_2m-p_1r, r, m)$, по прошествии очередного этапа развития популяции; $\gamma_{i,0,0}$ — коэффициент, который равен доле элементов $(0, 0)$-го вида, сохранившихся от объема $V(i-1, 0, 0)$, по прошествии очередного из первых $\min\{p_1, p_2\}$ этапов развития популяции.

Если задано V_0 и известны весовые коэффициенты, производимые операторами $\odot\alpha_{1,0,0}$, $\odot\beta_{1,0,0}$ и $\odot\gamma_{1,0,0}$, то по формулам (3)–(6) можно рассчитать общий объем популяции и присущее ей распределение по видам элементов на каждом из этапов развития.

Если $\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}\psi = 0$, то имеем интерпретацию, приведенную в [1]. При этих же значениях получаем соответствующие характеристики рассматриваемого процесса развития популяции.

В частном случае, если в соотношении (3)

$$V(n, k, l) = \frac{n!}{k!\, l!\, (n-k-l)!},$$

то получаем приведенную в [2] интерпретацию сумм $S_N(p_1, p_2)$ плоских сечений пирамиды Паскаля в терминах A-покрытий прямоугольников размера $1 \times N$ прямоугольниками размера $1 \times (p_1 + 1)$, $1 \times (p_2 + 1)$ и квадратами размера 1×1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кузьмин О. В.* Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. Новосибирск: Наука, Сибирская издательская фирма РАН, 2000.
2. *Серегина М. В.* Некоторые восходящие диагональные сечения пирамиды Паскаля и покрытия прямоугольников. — В материалах ежегодной научно-теоретической конференции аспирантов и студентов (Вестник Иркутского ун-та). Иркутск: Изд-во ИрГУ, 2009, с. 164–166.