А. Н. Тырсин, **И. С. Соколова** (Екатеринбург, НИЦ «НиР БСМ» УрОРАН, Челябинск, ЧелГУ). **Задача максимизации энтропии многомерной случайной величины.**

В настоящее время в моделировании сложных систем широкое распространение получил энтропийный подход, при котором показателем эффективности является энтропия систем.

Пусть случайный вектор $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ имеет нормальное распределение: $\mathbf{x}_i \sim N(m_{x_i}, \sigma_{x_i}^2)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и для него известна ковариационная матрица

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \operatorname{cov}(x_1, x_1) & \operatorname{cov}(x_1, x_2) & \ldots & \operatorname{cov}(x_1, x_n) \\ \operatorname{cov}(x_2, x_1) & \operatorname{cov}(x_2, x_2) & \ldots & \operatorname{cov}(x_2, x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \operatorname{cov}(x_n, x_1) & \operatorname{cov}(x_n, x_2) & \ldots & \operatorname{cov}(x_n, x_n) \end{pmatrix}.$$

Рассматривается задача максимального прироста энтропии многомерной случайной величины $\mathbf{x}$ путем добавления нормально распределенной случайной величины u, $u \sim N(m_u, \sigma_u^2)$, к одной из ее компонент x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Считается, что u не коррелированна с величинами x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Исходя из того, что энтропия случайного вектора $\mathbf{x}$ определяется по формуле $H(\mathbf{x}) = -\int_{\mathbf{R}^n} p(\mathbf{x}) \ln p(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$, где $p(\mathbf{x})$ — совместная плотность распределения вероятностей компонент вектора, установлено, что значение энтропии n-мерной нормально распределенной случайной величины равно

$$H = H(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = \frac{1}{2} \ln[(2\pi e)^n |\mathbf{\Sigma}|], \tag{1}$$

где $|\mathbf{\Sigma}|$ — определитель матрицы $\mathbf{\Sigma}$.

Отсюда выявлено, что энтропия вектора $\mathbf{x}$, полученная добавлением случайной величины u к одной из его составляющих x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, определяется по формуле

$$H^* = H(x_1, x_2, \ldots, x_i + u, \ldots, x_n) = \frac{1}{2} \ln[(2\pi e)^n |\mathbf{\Sigma}| + (2\pi e)^n \sigma_u^2 M_{ii}], \tag{2}$$

где M_{ii} — минор матрицы $\mathbf{\Sigma}$, полученный вычеркиванием из матрицы i-й строки и i-го столбца.

Воспользовавшись формулой (1), преобразуем формулу (2) и получим

$$H^* = H(x_1, x_2, \ldots, x_i + u, \ldots, x_n) = \frac{1}{2} \ln\left[e^{2H} + (2\pi e)^n \sigma_u^2 M_{ii})\right],$$

где H — исходная энтропия.

Следовательно, зная формулу изменения энтропии случайного вектора, становится возможным выявить ту его компоненту, добавление к которой новой случайной величины приведет к максимальному увеличению энтропии.

Таким образом, мы сформулировали следующую задачу:

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_i + u, \ldots, x_n) \to \max_{i \in [1,n]}. \tag{3}$$

Решив задачу (3), мы обеспечим максимальный прирост энтропии многомерной случайной величины.