Е. Г. Гольштейн (Москва, ЦЭМИ РАН). **Об одном необходимом и достаточном условии, которое обеспечивает монотонность отображения, связанного с конечной бескоалиционной игрой многих лиц.**

Пусть X_i — подмножество евклидова пространства $\mathbf{E}_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, f_i — функция, определенная на множестве X, являющемся декартовым произведением множеств $X_1, \dots, X_k$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \times \cdots \times \mathbf{E}_k$, $k \geqslant 2$. Введем бескоалиционную игру Γ с числом игроков k, задаваемую для каждого игрока i множеством его стратегий X_i и функцией выигрышей f_i, определенной на X. Условимся обозначать X^* множество точек Нэша игры Γ. Игру Γ будем называть *выпуклой*, если X — непустой выпуклый компакт, функция f_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, непрерывна на множестве $\{x = (x_1, \dots, x_k)\colon\ x_s \in X_s,\ 1 \leqslant s \leqslant k,\ x_i \in \widetilde{X}_i\}$ и вогнута по $x_i \in \widetilde{X}_i$ при любых фиксированных $x_s \in X_s$, $1 \leqslant s \leqslant k$, $s \neq i$, где $\widetilde{X}_i$ — открытое выпуклое множество, содержащее X_i. Свяжем с выпуклой игрой Γ точечно-множественное отображение T_Γ множества X в подмножества $\mathbf{E} \supset X$, определяемое соотношением

$$T_\Gamma(x) = \{(t = (t_1, \dots, t_k)\colon\ -t_i \in \partial_{x_i} f_i(x),\ 1 \leqslant i \leqslant k\}, \quad x \in X,$$

где $\partial_{x_i} f_i(x)$ — супердифференциал функции f_i по x_i в точке x. Множество X^* точек Нэша игры Γ совпадает с множеством решений вариационного неравенства

$$t \in T(x), \quad \langle t, x' - x\rangle \geqslant 0 \quad \forall x' \in X$$

при $T = T_\Gamma$. В работе [1] описан достаточо эффективный численный метод решения вариационных неравенств. Сходимость этого метода при $T = T_\Gamma$ гарантируется, если Γ — выпуклая игра, а отображение T_Γ обладает свойством *монотонности*.

Рассмотрим конечную бескоалиционную игру с числом игроков $k \geqslant 2$, в которой игрок i располагает n_i стратегиями, а его функция выигрышей задается с помощью k-мерной таблицы $A_i = (a^{(i)}_{s_1 \dots\, s_k})_{n_1 \dots n_k}$, где $a^{(i)}_{s_1 \dots s_k}$ — выигрыш игрока i, если игрок α выбирает стратегию s_α, $1 \leqslant \alpha \leqslant k$. Расширяя множества стратегий игроков за счет смешанных стратегий, приходим к игре Γ, в которой

$$X_i = \biggl\{x_i = (x_{i1}, \dots, x_{in_i})\colon\ \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} = 1,\ 1 \leqslant j \leqslant n_i\biggr\},$$

$$f_i(x) = \sum_{s_1 \dots s_k} a^{(i)}_{s_1 \dots s_k} x_{1s_1} \cdots x_{ks_k}, \quad 1 \leqslant i \leqslant k,$$

где $x = (x_1, \dots, x_k) \in X = X_1 \times \cdots \times X_k$. При $k = 2$ игра Γ определяется двумя матрицами $A_i = (a^{(i)}_{s_1 s_2})_{n_1 n_2}$, $i = 1, 2$. Игру Γ назовем почти матричной, если матрица $A = A_1 + A_2 = (a_{s_1 s_2})_{n_1 n_2}$ допускает представление $(a_{s_1 s_2})_{n_1 n_2} = (a'_{s_1} + a''_{s_2})_{n_1 n_2}$. Для любой пары игроков i, j, $i < j$, под $s(i,j)$ условимся понимать набор стратегий s_λ, при $1 \leqslant \lambda \leqslant k$, $\lambda \neq i, j$. Множество наборов стратегий $s(i,j)$ обозначим $S(i,j)$. С учетом введенных обозначений каждую из таблиц A_t можно записать в виде $A_t = (a^{(t)}_{s_i s_j s(i,j)})_{n_1 \dots n_k}$. Для любых фиксированных $i < j$, $1 \leqslant i, j \leqslant k$ и $s(i,j) \in S(i,j)$ игра Γ порождает игру $\Gamma_{ij}(s(i,j))$ двух лиц, определяемую матрицами $A_i(s(i,j)) = (a^{(i)}_{s_i s_j s(i,j)})_{n_i n_j}$ и $A_j(s(i,j)) = (a^{(j)}_{s_i s_j s(i,j)})_{n_i n_j}$.

Теорема. *Отображение T_Γ, которое связано с конечной игрой Γ в смешанных стратегиях, является монотонным в том и только в том случае, если игра двух лиц $\Gamma_{ij}(s(i,j))$ является почти матричной при любых $i < j$, $1 \leqslant i, j \leqslant k$ и $s(i,j) \in S(i,j)$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 09–01–00156.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гольштейн Е. Г.* Метод решения вариационных неравенств, определяемых монотонными отображениями. — Ж. вычислит. матем. и матем. физики, 2002, т. 42, № 7, с. 958–968.