И. А. Круглов (Москва, ТВП). **О гомоморфизмах сильно связных конечных автоматов без выхода на регулярные автоматы с абелевой группой, порожденной частичными функциями переходов состояний.**

Рассмотрим произвольный конечный сильно связный автомат без выхода $A = (X_A, S_A, \delta_A)$. Здесь X_A — входной алфавит, S_A — алфавит состояний, δ_A — функция переходов. Для некоторого конечного автомата $B = (X_B, S_B, \delta_B)$ пара сюръективных отображений $\varphi = (\alpha, \beta)$, α: $X_A \to X_B$, β: $S_A \to S_B$, называется *гомоморфизмом* автомата A на автомат B, если для любых $x \in X_A$, $s \in S_A$ верно равенство $\delta_B(\beta(s), \alpha(x)) = \beta(\delta_A(s, x))$. Этот гомоморфизм φ назовем *нетривиальным*, если $|S_B|\mathfrak{e}2$.

В [1] автором предложен новый подход к описанию гомоморфизмов конечных сильно связных автоматов без выхода на регулярные автоматы без выхода. В работе, представленной данным докладом, на основе предложенного подхода мы формулируем критерий существования у данного сильно связного конечного автомата без выхода нетривиального гомоморфизма на регулярный автомат, у которого частичные функции переходов состояний порождают коммутативную группу.

Введем (см. [2]) ориентированый граф Γ_A с множеством вершин S_A, множество (ориентированных) ребер которого есть объединение двух непересекающихся подмножеств $\{e_{s,t}^{+1} | s,\, t \in S_A,\, \exists x \in X_A\colon \delta_A(s,x) = t\}$ и $\{e_{t,s}^{-1} | s,\, t \in S_A,\, \exists x \in X_A\colon \delta_A(s,x) = t\}$. Рассмотрим некоторое семейство символов $\mathfrak{E} = \{\mathfrak{e}_{s,t} | s, t \in S_A,\, \exists x \in X_A\colon \delta_A(s,x) = t\}$ и свободную абелеву группу $(\mathfrak{F}, +)$, порожденную множеством свободных образующих элементов $\mathfrak{E}$. Определим отображение φ множества ориентированных ребер графа Γ_A в группу $\mathfrak{F}$ следующим образом. Для любых $s, t \in S_A$ таких, что существует $x \in X_A$, для которого $\delta_A(s,x) = t$, полагаем: $\varphi(e_{s,t}^{+1}) = \mathfrak{e}_{s,t}$, $\varphi(e_{t,s}^{-1}) = -\mathfrak{e}_{s,t}$.

Путем z в графе Γ_A называется последовательность ребер $z = (e_{s_1,s_2}^{\varepsilon_1}, e_{s_2,s_3}^{\varepsilon_2}, \ldots, e_{s_k,s_{k+1}}^{\varepsilon_k})$, при этом s_1 есть начало, s_{k+1} — конец пути z. Если $s_1 = s_{k+1}$, то путь z называется *петлей с концом* s_1. Каждому пути z в графе Γ_A соответствует элемент $\varphi(z) = \varphi(e_{s_1,s_2}^{\varepsilon_1}) + \varphi(e_{s_2,s_3}^{\varepsilon_2}) + \cdots + \varphi(e_{s_k,s_{k+1}}^{\varepsilon_k})$ группы $(\mathfrak{F}, +)$. Зафиксируем произвольное состояние $s_0 \in S_A$ и обозначим $Z^{(s_0)}$ множество всех петель в графе Γ_A с концом s_0, а $\mathfrak{B}$ — подгруппу $\{\varphi(z) | \forall z \in Z^{(s_0)}\}$ свободной группы $(\mathfrak{F}, +)$. Группа $\mathfrak{B}$ есть образ фундаментальной группы графа Γ_A (см. [2]) при естественном гомоморфизме свободной группы, порожденной множеством свободных образующих элементов $\mathfrak{E}$, на свободную абелеву группу $(\mathfrak{F}, +)$.

Далее, определим бинарное отношение $\rho = \{(x, x') | x, x' \in X_A,\, \exists s \in S_A\colon \delta_A(s,x) = \delta_A(s,x')\}$ на множестве X_A. Отношение ρ симметрично, следовательно, его транзитивное замыкание $\overline{\rho}$ является отношением эквивалентности на множестве X_A. Зафиксируем некоторый набор $\overline{X} \subset X_A$ представителей классов эквивалентности $\overline{\rho}$. Для любого $x \in X_A$ обозначим $\overline{x}$ представитель класса эквивалентности $\overline{\rho}$, содержащего элемент x: $\overline{x} \in \overline{X}$, $(x, \overline{x}) \in \overline{\rho}$. Рассмотрим также свободную абелеву группу $\mathfrak{A}$, порожденную множеством свободных образующих элементов $\overline{X}$. Введем отображение ϑ: $\mathfrak{E} \to \overline{X}$, при котором любому символу $\mathfrak{e}_{s,t} \in \mathfrak{E}$ однозначно соответствует элемент $\overline{x}_{s,t} \in \overline{X}$, определяемый соотношением $\overline{x}_{s,t} = \vartheta(\mathfrak{e}_{s,t}) = \overline{x}$ для всякого такого $x \in X_A$, что $\delta_A(s,x) = t$. Указанное отображение ϑ однозначно продолжается до сюръективного гомоморфизма свободных абелевых групп ϑ: $\mathfrak{F} \to \mathfrak{A}$.

Теорема. *Нетривиальный гомоморфизм автомата A на некоторый регулярный автомат B с коммутативной группой, порожденной его частичными функциями перехода состояний, существует тогда и только тогда, когда образ $\vartheta(\mathfrak{B})$ не совпадает с $\mathfrak{A}$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Круглов И.А.* О гомоморфизмах сильно связных конечных автоматов без выхода на регулярные автоматы. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 4, с. 672–673.
2. *Бахтурин Ю. А.* Основные структуры современной алгебры. М.: Наука / Физматлит, 1990, 320 с.